

Jan Czerniawski

Jak zrozumieć szczególną teorię względności

Wstęp

Szczególna teoria względności jest z matematycznego punktu widzenia niezwykle prosta. Zrozumieć ją w sensie opanowania jej matematycznego formalizmu jest więc dość łatwo. Trudności pojawiają się, gdy próbuje się pod ten formalizm podłożyć jakieś wyraźne intuicje. Warto zastanowić się, czy przynajmniej częściowo nie wynika to z jakiegoś błędu w tradycyjnym sposobie wykładania tej teorii.

„Nieintuicyjność” przekształceń Lorentza

Ze szczególną teorią względności wiąże się przede wszystkim zastąpienie kinematyki Galileusza przez kinematykę Lorentza. W odróżnieniu od tej pierwszej, druga uważana jest za nieintuicyjną. Czy jednak wynika to z natury rzeczy, czy też może raczej ze specyfiki standardowego sposobu wyprowadzenia przekształceń Lorentza?

Standardowy sposób opiera się na drugim postulacie Einsteina – zasadzie stałości prędkości światła. Stwierdza on, iż w „spoczywającym” układzie odniesienia, tj. w pewnym inercjalnym układzie odniesienia wybranym do opisu zjawisk, światło rozprzestrzenia się ze stałą prędkością, niezależną od kierunku i od ruchu źródła. W kontekście pierwszego postulatu – zasady względności – wynika z tego, że w każdym układzie inercjalnym rozprzestrzenia się ono z tą samą stałą prędkością, czyli że prędkość rozprzestrzeniania się światła jest wielkością absolutną. Wykazuje się, że jedynymi spełniającymi ten warunek przekształceniami kinematycznymi, które zarazem tworzą grupę (czego wymaga zasada względności), są właśnie przekształcenia Lorentza.

Dokonuje się więc swoistego „hokus-pokus”. Z nieintuicyjnego założenia o absolutności prędkości światła wyprowadza się zagadkowe przekształcenia, z których wynika m. in. względność równoczesności, proporcji wymiarów

liniowych poruszających się względem siebie obiektów i tempa przebiegających w nich procesów fizycznych. Można wątpić, czy uzyskuje się w ten sposób jakikolwiek postęp na drodze do zrozumienia ich fizycznego sensu.

„Intuicyjność” przekształceń Galileusza

Przyjrzyjmy się teraz standardowej metodzie wyprowadzenia przekształceń Galileusza. Aby je uzyskać, wystarczy wyobrazić sobie dwie siatki kartezjańskich współrzędnych przestrzennych, wprowadzonych za pomocą jednakowych miarek długości (prętów pomiarowych) w wybranym jako „spoczywający” inercjalnym układzie odniesienia i w układzie poruszającym się względem niego ruchem jednostajnym prostoliniowym. Euklidesowość przestrzeni pozwala tak dobrać początki układów współrzędnych i orientacje ich osi, by w pewnym momencie odpowiednie osie obu układów pokrywały się, a oś OX układu „spoczywającego” wyznaczała kierunek ruchu drugiego układu.

Nasuwa się spostrzeżenie, że w momencie tym obie siatki pokrywają się – co nie zachodzi w żadnym innym momencie, gdyż druga siatka wciąż przemieszcza się wzdłuż osi OX . Jeśli w obu układach odniesienia wprowadzić czas za pomocą identycznych, „dobrych” (tj. „idących” jednostajnie) zegarów, to początki obu skal czasowych można tak dobrać, by odpowiadały one właśnie momentowi pokrywania się początków układów współrzędnych przestrzennych. Łatwo zauważyć, że wtedy współrzędne czasoprzestrzenne w drugim układzie wyrażają się przez współrzędne w układzie „spoczywającym” wzorami:

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}$$

gdzie V – prędkość względnego ruchu układów.

Względność wymiarów przestrzennych i czasu

Wydów wydaje się całkowicie zrozumiały i jasny. Czy jednak nie zbyt jasny? Niewątpliwie nie przyjmuje się tu żadnych nieintuicyjnych założeń; co więcej, dla tych, które zostały sformułowane jawnie, wydaje się nie istnieć żadna rozsądna alternatywa. Warto jednak sprawdzić, czy w trakcie wyprowadzenia nie zostały przemyczone jakieś dodatkowe założenia, już nie tak oczywiste.

Z pewnością z euklidesowości przestrzeni wynika, że początki i orientacje obu układów współrzędnych przestrzennych mogą w pewnym momencie

pokrywać się; dlaczego jednak miałyby wtedy pokrywać się również ich skale? Byłoby tak, gdyby ruch nie miał żadnego wpływu na wymiary poruszających się ciał (w szczególności: prętów pomiarowych, użytych do wyskalowania osi układu poruszającego się). To ukryte założenie nie jest jednak oczywiste – co widać natychmiast po jego jawnym sformułowaniu. Równie uchwytnie dla intuicji (choć nie tak naturalne) jest bowiem alternatywne założenie, że wymiary te zmieniają się w proporcji zależnej od prędkości ruchu, przy czym, ponieważ ruch łamie izotropię przestrzeni, proporcja ta nie musi być jednakowa dla wszystkich wymiarów.

Tego rodzaju efekt przewiduje przyjęta w celu wyjaśnienia negatywnego wyniku eksperymentu Michelsona-Morley'a hipoteza Lorentza-Fitzgeralda, zgodnie z którą poruszające się ciała ulegają skróceniu w kierunku ruchu w proporcji zadanej czynnikiem Lorentza $\gamma = 1 / \sqrt{1 - (V^2/c^2)}$, gdzie c – stała równa prędkości światła w próżni. Jej przyjęcie oznacza, rzecz jasna, odpowiednią zmianę skali osi $O'X'$:

$$x' = \gamma(x - Vt).$$

Podobnie, choć w sposób nieco bardziej złożony, przedstawia się rzecz z czasem. Dlaczego właściwie po uzgodnieniu początków skal obu czasów, skale te miałyby się pokrywać? Byłoby tak, gdyby ruch nie miał wpływu na tempo procesów przebiegających w układach fizycznych (w szczególności: w zegarach). Tymczasem negatywny wynik będącego pewną modyfikacją doświadczenia Michelsona eksperymentu Kennedy'ego-Thorndike'a można wyjaśnić, uzupełniając wspomnianą wyżej hipotezę skrócenia o założenie, że procesy w materii poruszającej się przebiegają wolniej – znów w proporcji zadanej czynnikiem Lorentza¹.

Aby uniknąć ewentualnych nieporozumień, warto w tym miejscu wyraźnie zaznaczyć, iż nie podejmuje się tu w ogóle problemu realności obu wspomnianych efektów. Zakłada się tylko, że efekty te występują z punktu widzenia obserwatora operującego w „spoczywającym” układzie odniesienia.

Względność równoznaczności

Wydawać by się mogło, iż przy powyższym założeniu czas w układzie poruszającym się powinien wyrażać się wzorem:

$$t' = t/\gamma$$

Sprawa jednak nie przedstawia się tak prosto. Gdyby ruch nie miał wpływu na wskazania zegara, czas w każdym układzie odniesienia można byłoby określić za pomocą jednego tylko zegara, który mógłby w razie potrzeby zostać bez konsekwencji dla jego wskazań przetransportowany

¹ E.F. Taylor, J.A. Wheeler: *Fizyka czasoprzestrzeni*. Warszawa 1975.

w dowolne miejsce. Wobec jednak założonego efektu określenie czasu oprócz można jedynie na wskazaniach identycznych zegarów, zainstalowanych w różnych punktach przestrzeni i zawczasu zsynchronizowanych z umieszczonym w początku układu zegarem wzorcowym.

Do określenia czasu musi więc wejść pewna procedura synchronizacji zegarów. Rozważmy najprostszą taką procedurę, polegającą na dostrojeniu danego zegara do wskazań obserwowanego wzrokowo (np. przez lunetę lub na ekranie telewizora) zegara wzorcowego, przy uwzględnieniu poprawki na skończoność prędkości światła przez dodanie do zaobserwowanych wskazań wartości (l/c) , gdzie l – zmierzona w danym układzie odniesienia odległość od zegara wzorcowego, a c – prędkość światła (i innych fal elektromagnetycznych).

Założmy, że w układzie „spoczywającym” czas został już w oparciu o tę procedurę określony. Zastanówmy się, jaki będzie wynik zastosowania jej w układzie poruszającym się. Niech sygnał świetlny, niosący informację o wskazaniach zegara wzorcowego, opuści ten zegar w momencie wskazywania przezeń czasu t'_0 i dotrze do zsynchronizowanego z nim zegara po czasie T . Po zgodnym z procedurą dostrojeniu wskazań tego ostatniego będzie on wskazywał czas $t'_2 = t'_0 + (l'/c)$, gdzie l' – odległość między zegarami, zmierzona w układzie poruszającym się; natomiast zegar wzorcowy będzie wtedy wskazywał czas $t'_1 = t'_0 + (T/\gamma)$. W konsekwencji czasy wskazywane równocześnie z punktu widzenia obserwatora „spoczywającego” przez zegary zsynchronizowane w układzie poruszającym się będą się różnić o wartość:

$$\Delta t' = (l'/c) - (T/\gamma).$$

Spróbujmy wzór ten nieco rozwinąć. Zauważmy, że:

$$l'^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,$$

gdzie: $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ – różnice współrzędnych zegarów w układzie poruszającym się, przy czym, na mocy dotychczasowych ustaleń,

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z,$$

gdzie: Δx , Δy , Δz – odpowiednie różnice współrzędnych w układzie „spoczywającym”. Z drugiej strony, w układzie „spoczywającym” wykorzystany do synchronizacji sygnał świetlny przebył w czasie T odległość, której kwadrat wynosi $l^2 = (\Delta x + VT)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, z prędkością c , czyli:

$$(\Delta x + VT)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = c^2 T^2,$$

więc

$$(\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = c^2 T^2 - (\Delta x + VT)^2.$$

Podstawiając ten wynik do wzoru na l'^2 , po odpowiednich przekształceniach uzyskuje się:

$$l' = (cT/\gamma) - \gamma(V/c)\Delta x,$$

a w efekcie:

$$\Delta t' = -\gamma(V/c^2)\Delta x.$$

Niech zegar wzorcowy w chwili $t_0 = 0$ wskazuje czas $t'_0 + 0$. W chwili t będzie on wskazywał czas (t/γ) , natomiast dowolny inny zegar, znajdujący się wtedy w punkcie o współrzędnych (x, y, z) i zsynchronizowany z nim w układzie poruszającym się, wskazywał będzie czas:

$$t' = (t/\gamma) + \Delta t' = (t/\gamma) - \gamma(V/c^2)\Delta x,$$

przy czym w tym przypadku $\Delta x = x - Vt$. Po prostych rachunkach uzyskuje się:

$$t' = \gamma(t - (V/c^2)x).$$

Łatwo zauważyć, że jest to odpowiedni wzór przekształcenia Lorentza.

Intuicja a naturalny porządek wyjaśniania

Wychodząc więc od całkowicie dostępnych dla intuicji efektów skrócenia długości i dylatacji czasu (spowolnienia procesów), w połączeniu z równie intuicyjnie uchwytną zasadą stałości prędkości światła, otrzymaliśmy wniosek, iż przy tych założeniach obowiązuje kinematyka Lorentza; innymi słowy, udało nam się zredukować tę rzekomo nieintuicyjną kinematykę do paru intuicyjnych założeń, podobnie jak można to zrobić w przypadku kinematyki Galileusza. Z kolei z kinematyki Lorentza wynika relatywistyczna reguła składania prędkości, której konsekwencją jest absolutność prędkości światła – zredukowana w ten sposób do tychże założeń.

Źródłem trudności w uchwyceniu fizycznego sensu relatywistycznych przekształceń kinematycznych i efektu absolutności prędkości światła jest więc, jak się zdaje, występujące w tradycyjnym wyprowadzeniu odwrócenie naturalnego porządku wyjaśniania. To nie dlatego obowiązuje kinematyka Lorentza, że prędkość światła jest absolutna; odwrotnie, prędkość światła jest absolutna, ponieważ obowiązuje kinematyka Lorentza. Ta zaś jest konsekwencją efektów skrócenia długości i dylatacji czasu – a nie na odwrót.

W stosunku do tej ostatniej konkluzji podnieść można zastrzeżenie, że faktycznie, obok wspomnianych dwóch efektów, do wyprowadzenia przekształceń Lorentza wykorzystaliśmy zasadę stałości prędkości światła. Od angażowania tego dodatkowego założenia można się jednak całkowicie uwolnić, przyjmując inną procedurę synchronizacji zegarów – mianowicie synchronizację przez transport zegara. Procedura ta polega na tym, że zegar wzorcowy i drugi, zsynchronizowany z nim zegar, mija kolejno trzeci, fizycznie taki sam zegar, poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym. W mo-

mencie mijania zegara wzorcowego ów zegar porównawczy zostaje dostrojony do jego wskazań, a w momencie mijania drugiego zegara ten ostatni zostaje dostrojony do wskazań zegara porównawczego.

Oczywiście w związku z założonym efektem dylatacji czasu wynik tej procedury zależy od prędkości zegara porównawczego i na ogół jest różny od wyniku procedury świetlnej. Łatwo jednak pokazać, że w układzie „spoczywającym” w przypadku granicznym, przy prędkości zegara porównawczego dążącej do zera, wyniki obu procedur pokrywają się. Gdyby więc okazało się, że jest tak również w dowolnym innym układzie inercyjnym, oznaczałoby to, że procedura synchronizacji przez nieskończone powolny transport zegara jest równoważna procedurze świetlnej².

Rozważmy dwa zegary synchronizowane w układzie poruszającym się. Zegar porównawczy w układzie „spoczywającym” musi oczywiście poruszać się z prędkością:

$$v = \sqrt{(V + \alpha \Delta x)^2 + (\alpha \Delta y)^2 + (\alpha \Delta z)^2},$$

gdzie: Δx , Δy , Δz – odpowiednie różnice współrzędnych synchronizowanych zegarów w układzie „spoczywającym”, V – prędkość ich ruchu, $\alpha = (1/T)$, T – czas trwania procedury. Niech na początku zegar wzorcowy pokazuje czas t'_0 . Po zakończeniu procedury będzie on wskazywał czas $t'_1 = t'_0 + (T/\gamma(V))$, natomiast drugi zegar wskazywał będzie czas $\tau = t'_0 + (T/\gamma(v))$. W przypadku granicznym czasy wskazywane równocześnie przez zsynchronizowane zegary będą się więc różnić o wartość:

$$\Delta t' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\tau - t'_1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1/\alpha) ((1/\gamma(v)) - (1/\gamma(V))),$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma^2(V)} \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{d\alpha} (V) \quad (0),$$

$$\text{ale} \quad \frac{d\gamma}{dv} (V) = \gamma^3 (V) / c^2, \quad \frac{dv}{d\alpha} (0) = \Delta x,$$

$$\text{więc:} \quad \Delta t' = -\gamma(V/c^2) \Delta x,$$

co stanowi wynik identyczny z uzyskanym przy zastosowaniu poprzedniej procedury! Oznacza to, że uzależnienie przekształceń Lorentza od postulatu świetlnego było nieefektywne i może zostać wyeliminowane przez zmianę procedury synchronizacji. Faktycznie więc zakwestionowana konkluzja dotycząca stosunku logicznego kinematyki Lorentza do efektów skrócenia długości i dylatacji czasu jest jak najbardziej ścisła.

² A. Eddington: *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge 1960.

Zasada symetrii

Można jednak wysunąć inną obiekcję. Jeśli wspomniane dwa efekty potraktować jako pierwotne, to oczywiście kinematykę Lorentza można przedstawić jako ich konsekwencję. Czy jednak stosunek ten nie musi zostać odwrócony, jeśli zechcemy wyprowadzić je z bardziej podstawowej zasady?

Oczywiście byłoby tak, gdyby nie istniała żadna alternatywa dla wyprowadzenia tych efektów jako konsekwencji obowiązywania kinematyki Lorentza. Alternatywa taka jednak istnieje. Sformułujmy postulat, który nazwiemy tu „zasadą symetrii”: Każde prawo przyrody ma postać symetryczną względem przekształceń Lorentza.

Przekształcenia Lorentza nie są tu rozumiane jako obowiązujące przekształcenia kinematyczne, lecz jedynie jako czysto formalne podstawienia w miejsce współrzędnych pewnych ich funkcji, zadanych określonymi wzorami. Jeśli równanie wyrażające prawo przyrody ma odpowiednią symetrię, to podstawienie takie nie zmienia jego postaci.

Prawa przyrody wyznaczają możliwe stany układów fizycznych. Z zasady symetrii wynika więc tzw. „twierdzenie o stanach odpowiadających sobie” („theorem of corresponding states”):

Jeśli równanie $f(x)=0$, gdzie f jest pewną funkcją, a x – pewnym doбором współrzędnych czasoprzestrzennych, opisuje możliwy stan układu fizycznego, to równanie $f(x')=0$, gdzie x' – nowe zmienne, uzyskane ze współrzędnych x przez dowolne przekształcenie Lorentza, również opisuje możliwy stan tego układu.

Niech np. układ równań $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, gdzie x_0, y_0, z_0 – stałe, opisuje spoczynek jako możliwy stan ciała swobodnego. Z powyższego twierdzenia wynika, że układ równań $\gamma(x - Vt) = x_0, y = y_0, z = z_0$, również opisuje możliwy stan tego ciała (łatwo zauważyć, że jest to ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością V wzdłuż osi OX układu współrzędnych). Podobnie, jeśli równania:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = l_0^2 \quad \Delta t = T_0,$$

gdzie l_0, T_0 – stałe, opisują odpowiednio nieruchome ciało sztywne (stałość jego wymiaru liniowego) i nieruchomy zegar (stałość okresu procesu cyklicznego, określającego jednostkę odmierzanego przezeń czasu), to równania:

$$\gamma^2(\Delta x + V\Delta t)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = l_0^2, \quad \gamma(\Delta t - (V/c^2)\Delta x) = T_0$$

opisują odpowiednio takie samo ciało i zegar poruszające się ruchem swobodnym z prędkością V .

Łatwo zauważyć, że pierwsze z nich opisuje ciało skrócone w kierunku ruchu w proporcji zadanej przez czynnik Lorentza (wymiar ciała to odległość

³ A.I. Miller: *Albert Einstein's Special Theory of Relativity*. Reading, Massachusetts 1981.

równoczesnych położzeń końców, więc $\Delta t = 0$)), tj. wyraża relatywistyczny efekt skrócenia długości. Uwzględniając zaś dotyczącą poruszającego się zegara zależność $\Delta x = V\Delta t$, otrzymujemy z drugiego równania związek:

$$\gamma(1 - (V^2/c^2)) \Delta t = T_0, \text{ czyli } \Delta t = \gamma T_0,$$

wyrażający efekt dylatacji czasu. Efekt ten, podobnie jak efekt skrócenia, jest więc konsekwencją określonej formalnej symetrii praw przyrody, postulowanej przez zasadę symetrii.

Jak wykazaliśmy wyżej, konsekwencją tych dwóch efektów jest z kolei kinematyka Lorentza, co oznacza, że wprowadzone w sformułowaniu zasady symetrii w sposób czysto formalny nowe zmienne, otrzymane ze współrzędnych w „spoczywającym” układzie odniesienia przez przekształcenie Lorentza, okazują się być współrzędnymi czasoprzestrzennymi w innym układzie inercjalnym. Stąd zaś wynika, że skoro w myśl zasady symetrii wszystkie prawa przyrody są formalnie symetryczne względem tych przekształceń, to we wszystkich inercjalnych układach odniesienia wyrażają się one jednakowo – co jest treścią zasady względności, która wobec tego okazuje się być konsekwencją zasady symetrii.

Rola postulatów Einsteina w logicznej strukturze STW

Tu znów może pojawić się wątpliwość: czy dla wyjaśnienia obowiązywania zasady symetrii nie będzie konieczne odwołanie się do zasady względności? Przede wszystkim jednak, empiryczna treść zasady względności w zasadzie sprowadza się do pewnej generalizacji empirycznej (mianowicie do niemożliwości eksperymentalnego wykrycia absolutnego ruchu układu odniesienia); w sensie podstawowym nie może więc ona nic wyjaśniać, lecz sama wymaga wyjaśnienia. Z tej przyczyny na niepowodzenie skazane są próby przybliżenia szczególnej teorii względności intuicji przez oparcie wyprowadzenia przekształceń Lorentza na samej zasadzie względności, traktowanej jako aksjomat⁴ – mimo niewątpliwego postępu, jakim jest eliminacja z wyprowadzenia kłopotliwego postulatu „światłowego”.

W ogóle traktowanie postulatów Einsteina jako założeń wyjaśniających wynika z niezrozumienia ich rzeczywistego statusu. Faktycznie bowiem nie są one żadnymi „założeniami STW” lecz właśnie postulatami, tj. pewnymi wymaganiami, które poszukiwana teoria powinna spełnić w świetle znanych faktów empirycznych. Powinna ona mianowicie przewidzieć niewykrywalność ruchu absolutnego i niezależność prędkości światła od ruchu źródła – wymagania, które wydawały się nie do pogodzenia. Einstein znalazł sposób na spełnienie ich obu zarazem – była nim właśnie szczególna teoria względności.

⁴ Zob. np. A. Szymacha: *Szczególna teoria względności*. Warszawa 1985.

Po drugie zaś, konieczność taka nie zachodzi, gdyż odpowiednią symetrię praw przyrody wyjaśnić można, traktując ją jako konsekwencję symetrii czasoprzestrzeni – jak to się robi w ramach sformułowanej przez H. Minkowskiego tzw. geometrycznej interpretacji teorii względności⁵.

Pozostając w ramach tej interpretacji – obecnie standardowej – należałoby więc kolejno wyjaśniać:

- symetrię praw przyrody, wyrażonych w „spoczywającym” układzie odniesienia, przez symetrię czasoprzestrzeni;
- wpływ ruchu na parametry przyrządów pomiarowych w „spoczywającym” układzie odniesienia przez rodzaj symetrii praw przyrody;
- obowiązywanie tej, a nie innej kinematyki przez wpływ ruchu na parametry przyrządów;
- obowiązywanie zasady względności przez zgodność kinematyki z symetrią praw przyrody;
- niewykrywalność dla obserwatora poruszającego się ruchu względem „spoczywającego” układu odniesienia przez zasadę względności;
- w szczególności: absolutność prędkości światła przez zgodność jej wartości w „spoczywającym” układzie odniesienia ze stałą c , występującą w przekształceniach obowiązującej kinematyki Lorentza.

Niestety, w większości podręczników, najczęściej wskutek różnych filozoficznych uprzedzeń autorów, ten naturalny porządek wyjaśniania bywa odwracany, co jest, jak się zdaje, głównym źródłem trudności konceptualnych dla ich użytkowników.

Zastrzeżenie

Głównym, co nie znaczy: jedynym. W powyższym ciągu eksplanacyjnym punkt pierwszy budzić może wątpliwości. Otóż czasoprzestrzeń jest pewną strukturą, w zasadzie redukowalną do określonej na zbiorze zdarzeń pseudometryki; tę zaś z kolei sprowadzić można do wyników lokalnych pomiarów czasowych i przestrzennych. Pojawia się więc wątpliwość, czy jakakolwiek własność czasoprzestrzeni może posłużyć do pośredniego wyjaśniania zależności własności przyrządów pomiarowych od ruchu, czy raczej sama powinna być wyjaśniana przez własności przyrządów. Być może wobec tego należałoby zrezygnować z tego wątpliwego punktu i relatywistyczną symetrię praw przyrody pozostawić na razie jako fakt pierwotny, licząc na jej wyjaśnienie przez jakąś przyszłą teorię fizyczną.

⁵ Zob. *Encyklopedia fizyki współczesnej*. Warszawa 1983, s. 37.