

Anna Jedynak

Parametry racjonalności

Pojęcie racjonalności wyboru działania związane jest nieodłącznie z kryteriami podejmowania decyzji. Od kryteriów tych oczekujemy, aby spełniały pewne postulaty racjonalności, do których sprowadza się charakterystyka pojęcia racjonalności. Okazuje się, że żadne z kryteriów nie spełnia wszystkich tych postulatów i spełniać nie może, gdyż niektóre postulaty wykluczają się wzajemnie. Dlatego też pojęcie racjonalności scharakteryzowane przez ogół postulatów okazuje się wewnętrznie sprzeczne. Aby uwolnić je od sprzeczności, musimy odstąpić od niektórych przynajmniej postulatów racjonalności. Czynimy to, przyjmując jakiegokolwiek kryterium podejmowania decyzji: odstępujemy wówczas od tych postulatów, których dane kryterium nie spełnia. Osłabiamy tym samym pojęcie racjonalności, uwalniając je od sprzeczności. Wybór kryterium podejmowania decyzji oznacza więc wybór pojęcia racjonalności.

Sam problem podejmowania decyzji scharakteryzowany jest przez zbiór $\langle A, S, u \rangle$, gdzie A jest zbiorem możliwych działań, S – zbiorem stanów rzeczy, o jakich decydent wie, że dokładnie jeden z nich zachodzi, lecz nie wie który, a u jest funkcją użyteczności określoną na iloczynie kartezjańskim $A \times S$. Przyjęte jest tu założenie, że decydent umie wyrazić liczbowo użyteczności osiągnięte wskutek podjęcia określonych działań przy danych stanach rzeczy. Każde u_{ij} jest więc liczbą wskazującą, jak wartościuje decydent skutki działania a_i przy stanie rzeczy s_j .

Oto przykład najprostszego nietrywialnego problemu decyzji:

(1)

	s_1	s_2
a_1	0	2
a_2	1	1

Problem jest trywialny, gdy jedno z działań jest dominujące: a_i jest zdominowane słabo przez a_j , gdy przy każdym stanie rzeczy a_j przynosi nie mniejszą użyteczność niż a_i ; a_i jest zdominowane mocno przez a_j , gdy ponadto przy

pewnym stanie rzeczy a_j przynosi użyteczność większą niż a_i . W powyższym przykładzie żadne działanie nie jest dominujące: to, czy wybierając którekolwiek działanie zyskujemy więcej, niż gdybyśmy wybrali to drugie – zależy od tego, jaki stan rzeczy zachodzi, mianowicie przy s_1 korzystniej jest wybrać a_2 , a przy s_2 – a_1 . Nie wiedząc, jak się rzeczy mają, musimy odwołać się do któregoś z kryteriów podejmowania decyzji.

Kryteria te operują wskaźnikami liczbowymi, charakteryzującymi poszczególne działania, obliczanymi według podanych wzorów z funkcji użyteczności. Kryteria nakazują podjęcie tych działań, których wskaźniki są w danym problemie najwyższe (bądź najniższe). Niekiedy więcej niż jedno działanie jest optymalne w myśl danego kryterium.

Oto przykłady najczęściej spotykanych w literaturze kryteriów:

1) MEU (*Maximization of Expected Utility*) odwołuje się do rozkładu prawdopodobieństwa $p = \langle p_1 \dots p_n \rangle$ w S . Optymalne jest działanie maksymalizujące wskaźnik:

$$\sum_j u_{ij} p_{ij}$$

Cała arbitralność sprowadza się tu do ustalenia p . W wypadku pozostałych kryteriów arbitralność dotyczy samego wyboru kryterium, dlatego też ów wybór podlega ocenie za pomocą postulatów racjonalności. MEU tej oceny nie wymaga.

2) Kryterium Laplace'a jest szczególnym przypadkiem MEU, gdzie wszystkie stany rzeczy uznano za równoprawdopodobne. Optymalne jest działanie maksymalizujące wskaźnik:

$$\frac{1}{n} \sum_j u_{ij}$$

gdzie n jest liczbą stanów rzeczy.

3) Zgodnie z kryterium minimum optymalne jest działanie maksymalizujące minimalną użyteczność, czyli maksymalizujące wskaźnik:

$$\min_j u_{ij}$$

zwany niekiedy poziomem bezpieczeństwa działań. Decydent bierze tu pod uwagę jedynie najgorsze dla poszczególnych działań warianty.

4) Kryterium Hurwicza operuje parametrem α , gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Optymalne jest działanie maksymalizujące sumę ważoną największej i najmniejszej użyteczności, czyli maksymalizujące wskaźnik:

$$\alpha \min_j u_{ij} + (1 - \alpha) \max_j u_{ij}$$

zwane jest tu współczynnikiem pesymizmu.

5) Kryterium β , sformułowane przez prof. Szaniawskiego, odwołuje się do sumy ważonej średniej i najmniejszej użyteczności. Optymalne jest działanie maksymalizujące wskaźnik:

$$\beta \min_j u_{ij} + (1 - \beta) \frac{1}{n} \sum_j u_{ij},$$

gdzie $0 < \beta < 1$.

6) Kryterium Savage'a odwołuje się do macierzy strat. Macierz strat otrzymujemy, przekształcając macierz użyteczności w taki sposób, aby w miejscu każdego u_{ij} znalazło się w_{ij} równe $\max_k u_{kj} - u_{ij}$.

Wartość straty wskazuje, ile więcej decydent mógłby zyskać, niż zyskał przy danym a_i i s_j , gdyby podjął najkorzystniejsze przy danym s_j działanie.

I tak np. macierz strat dla problemu decyzji (1) jest następująca:

$$(2) \quad \begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}$$

Optymalne jest działanie minimalizujące najwyższą stratę, czyli minimalizujące wskaźnik:

$$\max_j w_{ij}$$

A oto postulaty racjonalności, za pomocą których oceniać można te kryteria (przypatrzam za pracą K. Szaniawskiego *Kryteria podejmowania decyzji* w: *Problemy psychologii matematycznej*, Warszawa 1971, tamże podana jest literatura przedmiotu).

Niech A^* oznacza zbiór działań optymalnych,

- P1. A^* jest niepusty. (Czyli: każdy problem decyzji ma rozwiązanie.)
- P2. A^* jest niezmienniczy ze względu na dodatnią transformację liniową macierzy użyteczności. (Czyli: zmiana jednostki i początku układu skali nie wpływa na A^* .)
- P3. A^* nie zależy od numeracji działań.
- P4. Jeśli $a_i \in A^*$ i a_i jest słabo zdominowane przez a_j , to $a_j \in A^*$.
- P5. Jeśli $a_i \in A^*$, to a_i nie jest mocno zdominowane przez żadne inne działanie.
- P6. Na optymalność (resp. nieoptymalność) dowolnego działania nie ma wpływu rozszerzenie zbioru A o nowe działania zdominowane przez któreś z działań ze zbioru A .
- P7. Jeśli rozszerzyć zbiór A , to działanie nieoptymalne pozostaje nieoptymalnym.

- P8. A^* jest niezmienniczy ze względu na dodanie do każdej pozycji pewnej kolumny stałej c (gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą).
 P9. Optymalny jest także wybór losowy między działaniami optymalnymi.
 P10. A^* nie zależy od numeracji stanów rzeczy.
 P11. A^* jest niezmienniczy z uwagi na skreślenie dowolnej kolumny identycznej z jakąś inną.
 P12. Jeśli problem decyzji nie jest trywialny, to informacja wskazująca faktyczne s ma wartość różną od zera.
 P13. A^* nie jest niezmienniczy ze względu na takie przekształcenie macierzy użyteczności, które zmienia poziom bezpieczeństwa działań.

Układ tych postulatów jest sprzeczny (np. z P13, wynika negacja P8. i na odwrót; P1–10. wykluczają się z P11.), zatem żadne kryterium podejmowania decyzji nie spełnia ich wszystkich. Wybierając kryterium wskazujemy tym samym postulat, jakie ono spełnia, zatem – dokonujemy wyboru pojęcia racjonalności.

P1–6. spełnione są przez wszystkie wymienione wyżej kryteria (przy zastrzeżeniu, że maximin i kryterium stosujemy po usunięciu z macierzy działań mocno zdominowanych). Spełnianie dalszych postulatów ilustruje tabela:

Postulat	Kryterium				
	Savage'a	maximin	α	β	Laplace'a
7	–	+	+	+	+
8	+	–	–	–	+
9	+	+	–	+	+
			(dla $\alpha < 1$)		
10	+	+	+	+	+
11	+	+	+	–	–
12	+	–	–	+	+
13	–	+	+	+	–

Jeśli mówimy, że dane kryterium nie spełnia pewnego postulatu racjonalności, nie znaczy to, że nieracjonalność owa uwidacznia się na gruncie każdego problemu decyzji, lecz tylko na gruncie pewnych problemów. Na przykład, kryterium Laplace'a nie spełnia P11.; nieracjonalność tę ujawnia problem

	s_1	s_2	s_3
a_1	5	2	2
a_2	2	4	4

(3)

gdyż przed skreśleniem s_3 optymalne jest a_2 , a po skreśleniu – a_1 . Natomiast problem

(4)

	s_1	s_2	s_3
a_1	5	2	2
a_2	4	4	4

nie ujawnia nieracjonalności kryterium Laplace'a w myśl P11, gdyż zarówno przed, jak i po skreśleniu s_3 działaniem optymalnym jest a_2 .

P7. nie jest spełniony przez kryterium Savage'a, co ilustruje następujący przykład:

(5)

macierz użyteczności			macierz strat	
	s_1	s_2	s_1	s_2
a_1	1	5	2	0
a_2	3	2	0	3
a_1	1	5	4	0
a_2	3	2	2	3
a_3	5	0	0	5

Gdy $A = \{a_1, a_2\}$, to a_1 jest optymalne. Gdy A rozszerzyć o a_3 , optymalne staje się a_2 .

P8. nie jest spełniony przez maximin oraz kryteria α i β , gdyż uwzględniają one we wskaźnikach poziom bezpieczeństwa działań (z użyciem parametru lub bez). Jeśli zatem dodanie stałej c do wszystkich pozycji pewnej kolumny zmieni ów poziom, może to wpłynąć na optymalność działań.

P9. nie jest spełniony przez kryterium α dla $\alpha < 1$, co ilustruje przykład:

(6)

	s_1	s_2	s_3
a_1	4	0	0
a_2	0	4	0
$a_1 \vee a_2$	2	2	0

Gdy $\alpha = 1/2$, wskaźnik, zarówno dla a_1 , jak i dla a_2 , wynosi 2 – co czyni oba działania optymalnymi, natomiast wskaźnik ich losowego wyboru wynosi 1.

P11. nie jest spełniony przez kryterium Laplace'a, co ilustruje przykład 3. Podobnie nie spełnia tego postulatu kryterium β , gdyż wskaźnik laplace'owski stanowi tam jeden ze składników sumy ważonej.

P12. nie jest spełniony przez maximin, jeśli w macierzy użyteczności istnieje punkt siodłowy (tzn. najmniejszy w swoim wierszu i największy

w swojej kolumnie). Postulatu tego nie spełnia także kryterium α dla $\alpha = 1$ (gdyż wtedy sprowadza się do maximinu) i dla $\alpha = 0$ (gdyż dla skrajnego optymisty żadna informacja nie jest istotna – zawsze wybierze on to działanie, które obejmuje najwyższą w macierzy użyteczność).

P13. wyklucza obojętność na ryzyko: żąda, by ryzyka programowo bądź unikać, bądź je podejmować. Postulat ten spełniają więc te kryteria spośród wymienionych, które we wskaźnikach uwzględniają poziom bezpieczeństwa działań. Pozostałe go nie spełniają. (Z pewnym jednak wyjątkiem: kryterium α dla $\alpha = 1/2$ w problemie, gdzie $S = \{s_1, s_2\}$ – funkcjonuje dokładnie tak, jak kryterium Laplace'a. Ilustruje to problem (1), gdzie w myśl kryterium α dla $\alpha = 1/2$ a_1 jest tak samo dobre, jak i a_2 , co oznacza obojętność na ryzyko. A^* pozostaje tu niezmienniczy z uwagi na wymienione w P13. przekształcenie macierzy.)

Jak wskazują powyższe rozważania, w wypadku kryteriów parametrycznych od wartości parametru zależy niekiedy, czy dane kryterium spełnia określone postulaty. Nie cała zatem arbitralność sprowadza się do wyboru kryterium; dotyczy ona także ustalenia wartości parametrów. Nasuwa się tu pytanie, czy możliwe byłoby takie kryterium, dla którego nie można by wskazać postulatu spośród P1–13., którego by ono nie spełniało przy stosownym doborze parametru. Wówczas cała arbitralność dotycząca wyboru pojęcia racjonalności znalazłaby się w obrębie tego kryterium i dotyczyłaby ustalenia wartości parametru.

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Najprostszym takim kryterium jest nieco zmodyfikowane kryterium β – nazwijmy je β^* – operujące identycznym wskaźnikiem co β i postulatem wyboru działania maksymalizującego ów wskaźnik, lecz gdzie $0 \leq \beta^* \leq 1$ (w wypadku β mieliśmy $0 < \beta < 1$). Parametr $\beta^* = 1$ sprowadzi nasze kryterium do maximinu, a $\beta^* = 0$ sprowadzi je do kryterium Laplace'a. Jak widać z tabeli, nie ma wśród wymienionych postulatów racjonalności takiego, którego nie spełniałby ani maximin, ani kryterium Laplace'a. Zatem $\beta^* = 1$ gwarantuje spełnienie przez kryterium β^* postulatów 11. i 13. (gdyż spełnia je maximin, choć nie spełnia ich kryterium Laplace'a), a $\beta^* = 0$ gwarantuje spełnienie przez to kryterium postulatów 8. i 12. (gdyż spełnia je kryterium Laplace'a, choć nie spełnia ich maximin). Gdy natomiast β^* nie przyjmuje wartości ekstremalnych, wraz ze zmianą parametru zmienia się zbiór tych problemów decyzji, na gruncie których ujawnia się nieracjonalność naszego kryterium w myśl danych postulatów.

Można by się spodziewać, że im bardziej kryterium β^* zbliżać się będzie do kryterium Laplace'a (tzn. gdy β^* będzie maleć), tym mniejsze będzie

prawdopodobieństwo, że losowo wybrany problem ujawni nieracjonalność kryterium β^* w myśl P8. i P12. I podobnie, im bardziej kryterium to będzie zbliżać się do maximinu (wskutek wzrostu β^*), tym niższe będzie prawdopodobieństwo, że losowo wybrany problem ujawni jego nieracjonalność w myśl P11. i P13. Rzeczywiście, jest tak w ogólnej tendencji; nie oznacza to jednak, że dla każdego problemu wskazać można pewne graniczne β^* , poniżej którego problem nie ujawni nieracjonalności kryterium w myśl P8. i/lub P12. (*resp.* powyżej którego problem nie ujawni nieracjonalności kryterium w myśl P11. i/lub P13.). Dalej, dla oszczędności miejsca, rozważmy tę kwestię tylko w odniesieniu do P11.

Podzielmy wszystkie problemy decyzji na dwie klasy: niech do pierwszej należą te problemy, w których zbiór A^* jest niezmienniczy bez względu na wartość parametru β^* . Do drugiej niech należą pozostałe problemy. Warunek charakteryzujący przynależność do pierwszej klasy spełniają wyłącznie te problemy, w których jedno i to samo działanie maksymalizuje wskaźnik zarówno laplace'owski, jak i maximinowy. Rozważając na przykładach racjonalność jakichkolwiek kryteriów w myśl P11. porównujemy zawsze ze względu na A^* dwa problemy decyzji: pierwszy – gdzie dwie kolumny są identyczne i drugi – gdzie jedną z tych kolumn skreślono. Otóż jeśli problem decyzji w co najmniej jednym z dwóch przypadków: przed lub po skreśleniu jednej z dwóch identycznych kolumn należy do pierwszej klasy, to można wskazać dla niego wspomniane wyżej graniczne β^* .

Prześledźmy to na przykładzie. Niech będzie dany problem, gdzie jedno i to samo działanie maksymalizuje i najniższą, i średnią użyteczność i niech przy tym w macierzy występują dwie identyczne kolumny.

(7)

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0	5	1	1
a_2	1	1	3	3

Przy każdym β^* a_2 jest korzystniejsze niż a_1 . Natomiast po skreśleniu ostatniej kolumny dla $\beta^* = 1/4$ oba działania są jednakowo dobre; dla $\beta < 1/4$ optymalne jest a_1 , czyli działanie maksymalizujące wskaźnik laplace'owski (średnią użyteczność); dla $\beta^* > 1/4$ optymalne jest a_2 , czyli działanie maksymalizujące wskaźnik maximinowy (najniższą użyteczność). Okazuje się zatem, że dla $\beta^* \in <0; 1/4>$ problem (7) ujawnia nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11., gdyż skreślenie jednej z dwóch identycznych kolumn wpływa na optymalność działań; dla $\beta^* \in <1/4; 1>$ natomiast sytuacja taka nie zachodzi: po skreśleniu ostatniej kolumny optymalnej jest to działanie, które było nim wcześniej. $\beta^* \in$ graniczne wynosi tu $1/4$.

Skreślenie jednej z dwóch identycznych kolumn nie wpływa na zmianę wskaźników maximinowych, natomiast może wpłynąć na zmianę wskaźników

laplace'owskich. Jeśli po dokonaniu przekształcenia problem nadal należy do pierwszej klasy, to nie ujawnia nieracjonalności kryterium β^* w myśl P11. dla żadnej wartości β^* , gdyż przy wszelkich β^* optymalne jest to samo działanie, co przed przekształceniem problemu. Jeśli natomiast przekształcony problem kwalifikuje się do klasy drugiej, to wówczas – jak to ilustruje przedstawiony przykład – wartość β^* ustalić można tak, aby optymalne było działanie maksymalizujące wskaźnik maximinowy (jest tak, gdy β^* przyjmuje dostatecznie wysoką wartość), a można też ustalić ją tak, aby optymalne było działanie maksymalizujące wskaźnik laplace'owski (ponieważ wskaźnik ten mnożymy przez $1 - \beta^*$, jest tak, gdy β^* jest odpowiednio niskie). β^* graniczne to najniższa wartość parametru, przy której działanie maksymalizujące wskaźnik maximinowy jest optymalne, a zarazem najwyższa wartość, przy której optymalne jest także jakieś inne działanie (najczęściej to, które maksymalizuje wskaźnik laplace'owski, choć nie zawsze, o czym świadczy następujący przykład:)

(8)

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	4	4	4	4
a_2	2	6	6	5
a_3	3	6	5	4

Dla $\beta^* \in <0; 1/5>$ optymalne jest a_2 , czyli działanie maksymalizujące wskaźnik laplace'owski; dla $\beta^* \in <1/3; 1>$ optymalne jest a_1 , czyli działanie maksymalizujące wskaźnik maximinowy; natomiast dla $\beta^* \in <1/5; 1/3>$ optymalne jest a_3 , czyli działanie, które nie maksymalizuje żadnego z pojedynczych wskaźników, do jakich odwołuje się kryterium β^* .)

Tak więc gdy β^* wyższe jest od β^* granicznego, to jedno i to samo działanie i tylko ono – mianowicie działanie maksymalizujące wskaźnik maximinowy – jest optymalne zarówno po skreśleniu jednej z dwóch identycznych kolumn, jak i przed skreśleniem (o ile wówczas problem kwalifikował się do klasy pierwszej). Nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11. nie ujawnia się wówczas. Gdy natomiast β^* jest równe lub niższe od β^* granicznego, to zbiór działań optymalnych zmienia się wraz ze skreśleniem jednej z dwóch identycznych kolumn, a problem ujawnia wtedy nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11.

Analogiczna sytuacja ma miejsce wtedy, gdy problem wyjściowy należy do drugiej klasy, natomiast po skreśleniu jednej z dwóch identycznych kolumn kwalifikuje się do klasy pierwszej. Oto przykład takiego problemu:

(9)

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0	0	5	5
a_2	1	4	1	1

Dla $\beta^* \leq \frac{3}{7}$ problem ten ujawnia nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11., natomiast dla $\beta^* > \frac{3}{7}$ – już nie.

Dla każdego problemu, należącego w dokładnie jednym z dwóch przypadków: przed lub po dokonaniu przekształcenia, o jakim mówi P11., do klasy pierwszej, spadek β^* poniżej pewnego punktu granicznego oznacza ujawnienie nieracjonalności kryterium β^* w myśl P11., natomiast wzrost β^* powyżej tego punktu oznacza, że nieracjonalność ta nie ujawni się na gruncie danego problemu. Tak więc im niższe β^* , tym częściej losowo wybrany problem ujawniać będzie nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11.

Natomiast w przypadku takich problemów, które i przed, i po skreśleniu jednej z dwóch identycznych kolumn należą do drugiej klasy, sprawy mają się nieco inaczej. Może bowiem być tak, że przy pewnym β^* dany problem nie ujawnia nieracjonalności kryterium β^* w myśl P11., natomiast wzrost β^* spowoduje ujawnienie tej nieracjonalności. Niech zilustruje to następujący przykład:

(10)

	s_1	s_2	s_3
a_1	1	10	10
a_2	2	2	2

Przed skreśleniem ostatniej kolumny $A^* = \{a_1\}$, gdy $\beta^* < \frac{5}{6}$; $A^* = \{a_1, a_2\}$, gdy $\beta^* = \frac{5}{6}$; $A^* = \{a_2\}$, gdy $\beta^* > \frac{5}{6}$. Po skreśleniu ostatniej kolumny $A^* = \{a_1\}$, gdy $\beta^* < \frac{7}{9}$; $A^* = \{a_1, a_2\}$, gdy $\beta^* = \frac{7}{9}$; $A^* = \{a_2\}$, gdy $\beta^* > \frac{7}{9}$. Skreślenie ostatniej kolumny wpływa więc na zmianę zbioru działań optymalnych, gdy $\beta^* \in <\frac{7}{9}; \frac{5}{6}>$. Tak więc nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11. ujawnia się na gruncie tego problemu nie wtedy, gdy β^* jest bliskie zeru, lecz – paradoksalnie – wtedy, gdy wzięte jest ono z przedziału bliższego jedności niż zeru, czyli gdy kryterium β^* z uwagi na wartość parametru zbliża się do maximum, które wszak spełnia P11.

Zbadanie zależności prawdopodobieństwa, że losowo wybrany problem z klasy drugiej ujawni nieracjonalność kryterium β^* , przekracza ramy niniejszego szkicu. Można tu tylko zaznaczyć, co następuje:

Jeśli na gruncie pewnego problemu różnice we wskaźnikach laplace'owskich poszczególnych działań są wielokrotnie wyższe od różnic we wskaźnikach maximinowych, to problem ten ujawnia nieracjonalność kryterium β^* w myśl P11. dla β^* sytuującego się w przedziale bliskim jedności; gdy, przeciwnie, różnice we wskaźnikach laplace'owskich są wielokrotnie niższe od różnic we wskaźnikach maximinowych, to β^* , przy którym nasze kryterium okazuje się nieracjonalne w myśl P11., sytuuje się w przedziale bliskim zeru; gdy natomiast różnice te reprezentują podobny rząd wielkości, to β^* przyjmuje wartości pośrednie.

Dla problemów należących do klasy drugiej nie jest więc tak, że im niższe β^* , tym częściej kryterium β^* okaże się nieracjonalne w myśl P11. Ponieważ

jednak jest tak dla problemów z klasy pierwszej, jest tak również i w klasie wszystkich problemów, choć zależność ta zaznacza się tam słabiej niż w samej klasie pierwszej. W ogólnej tendencji im bardziej kryterium β^* zbliżać się będzie, z uwagi na wartość parametru, do maximum, tym rzadziej ujawniać się będzie jego nieracjonalność w myśl P11. I odwrotnie, im bardziej będzie się ono zbliżać do kryterium Laplace'a, tym częściej ujawni się ta nieracjonalność. Podobnie jest w przypadku innych postulatów.

Z uwagi na to β^* jest nie tylko wskaźnikiem pesymizmu; współkształtuje ono ponadto pojęcie racjonalności, zatem może być nazwane parametrem racjonalności. Od wyboru β^* zależy, które postulaty racjonalności kryterium β^* będzie spełniać: dla wartości ekstremalnych pewne postulaty – przy innych wartościach β^* nie spełnione – będą spełnione zawsze; natomiast dla wartości nieekstremalnych wybór β^* przesądza, jaki jest zakres problemów ujawniających nieracjonalność kryterium β^* w myśl określonych postulatów, zatem – czy nieracjonalność ta będzie zjawiskiem mniej czy bardziej eksponowanym.

Można by wskazać więcej parametrycznych kryteriów, spełniających ten sam warunek, co β^* (tzn. warunek głoszący, że nie ma takiego postulatu racjonalności, którego by nie spełniło dane kryterium przy stosownym doborze parametru). Kryteria takie mogą być jednoparametryczne lub operujące większą ilością parametrów, które są zarazem parametrami racjonalności. Zgodnie z tymi kryteriami za optymalne można by uznać działania maksymalizujące, przykładowo, takie oto wskaźniki:

$$a) \alpha \max_j u_{ij} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_j u_{ij}, \quad \text{gdzie } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$b) \alpha_1 \max_j u_{ij} + \alpha_2 \min_j u_{ij} + [1 - (\alpha_1 + \alpha_2)] \frac{1}{n} \sum_j u_{ij},$$

$$\text{gdzie } 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \text{ i } 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \text{ i } 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$$

$$c) \alpha \min_j u_{ij} - (1 - \alpha) \max_j w_{ij}, \quad \text{gdzie } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$d) \alpha \max_j u_{ij} - (1 - \alpha) \max_j w_{ij}, \quad \text{gdzie } 0 \leq \alpha \leq 1$$

W szczególności kryterium mogłoby odwoływać się do wszystkich wymienionych na początku wskaźników. Nakazywałoby wówczas podjęcie działania maksymalizującego wskaźnik:

$$e) \alpha_1 \min_j u_{ij} + \alpha_2 \max_j u_{ij} + \alpha_3 \frac{1}{n} \sum_j u_{ij} - \alpha_4 \max_j w_{ij},$$

gdzie dla każdego α $0 \leq \alpha \leq 1$, a ponadto $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$.

Każde z pozostałych kryteriów można by wówczas interpretować jako szczególny przypadek tego ostatniego, gdzie pewne parametry racjonalności

(niekiedy wszystkie prócz jednego) są równe zeru.

Wybór kryterium β^* bądź któregoś z kryteriów $a-e$ nie precyzuje pojęcia racjonalności; następuje to dopiero przy ustaleniu wartości parametrów. Pojęcie to nabiera więc charakteru ilościowego, ale – tylko na gruncie przyjętego kryterium, gdyż nie można sensownie operować parametrami racjonalności w oderwaniu od wszelkich kryteriów podejmowania decyzji.

W jakościowym wyborze któregoś z kryteriów β^* , $a-e$ lub innych podobnych także można dopatrywać się czynnika ilościowego, interpretując ów wybór jako ustalenie wartości parametrów $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ na gruncie najogólniejszego kryterium (e). Wybór ten jednak musi być poprzedzony przyjęciem tego ogólnego kryterium.

Jak więc widać, pojęcie racjonalności można przedstawić ilościowo, w formie wartości parametrów zwanych tu parametrami racjonalności; odnoszą się one jednak zawsze do pewnych wskaźników, charakteryzujących działania w problemie decyzji, a wybór tych wskaźników ma charakter jakościowy.