

Postulat redukcjonizmu zaleca sprowadzanie wszędzie tam, gdzie to możliwe, (pozornie) różnych pojęć do wspólnych podstaw: pojęć i zasad pierwotniejszych. W ten sposób osiąga się unifikację języka i twierdzeń w tym języku wygłaszanych. Szczególnie ważną odmianą redukcji jest redukcja terminów i tez teoretycznych do terminów i tez empirycznych. Według Zawirskiego możliwa jest w tym wypadku jedynie redukcja implikacyjna, a nie – ekwiwalencyjna.

Zawirski badał szczegółowo możliwość redukcji w trzech dziedzinach: w psychologii, w fizyce i w matematyce.

W psychologii starał się wykazać, że wszystkie zasady kojarzenia przedstawień dadzą się sprowadzić do zasady styczności (całkowitej lub częściowej, zewnętrznej lub wewnętrznej).

W fizyce odrzucił możliwość sprowadzenia do innych zasad zasady przyczynowości. W szczególności podał w wątpliwość pogląd, jakoby zależność kauzalna dała się wyeliminować na rzecz zależności inferencyjnej, albo funkcjonalnej (którą – niesłusznie zresztą – uważał za jedno-jednoznaczłą) czy koegzystencyjnej, bez daleko idących modyfikacji, »naciągania« odpowiednich pojęć.

W matematyce natomiast, akceptując osłabiony logicyzm, uznawał możliwość sprowadzenia jej pojęć (pierwotnych) do pojęć logicznych – przy niesprowadzalności niektórych zasad – w szczególności matematycznych pewników istnienia (np. aksjomatów nieskończoności czy wyboru). Sam usiłował przeprowadzić redukcję rachunku prawdopodobieństwa do logiki wielowartościowej. Miał przy tym jednak wątpliwości, czy zdania prawdopodobne – w każdym razie jeśli się je uzna za zdania o prawdopodobieństwie pewnych zdań – mogą być traktowane na równi ze zdaniami prawdziwymi i fałszywymi. Analizował też z tego punktu widzenia relację między logiką klasyczną i intuicjonistyczną.

Anna Lissowska

Logika klasyczna i intuicjonistyczna

Referując prace Brouwera i Heytinga dotyczące matematyki i logiki intuicjonistycznej, Zawirski pisze m.in.: „Badając [...] prawa logiki dwuwartościowej przekonamy się, że tylko niektóre z nich będą prawdziwe w logice Brouwera; inne okażą się tylko możliwe” (1946, s. 201)*. W związku z tym

* Wykaz prac Zygmunta Zawirskiego, a także cytowane prace innych autorów patrz s. 106.

stwierdzeniem nasuwa się pytanie o to, jaka dokładnie relacja zachodzi między logiką klasyczną i intuicjonistyczną, i jak należy ją badać.

We współczesnej literaturze na ten temat można znaleźć dwie przynajmniej pozornie sprzeczne opinie. Niektórzy – np. Suchoń i Porębska (1991), Marciszewski (1988), a także, jak wypadaloby sądzić na podstawie powyższego cytatu, Zawirski – sądzą, że logika intuicjonistyczna jest zawarta w logice klasycznej w tym sensie, że każda teza intuicjonizmu jest też tezą klasyczną, ale nie odwrotnie. Najczęściej przytaczanym przykładem tezy klasycznej nie obowiązującej w intuicjonizmie jest prawo wyłączonego środka ($p \vee \sim p$).

Inni – np. Łukasiewicz (1952), Gödel (1932), Wójcicki i Tokarz (1971), Wojtylak (1981) – twierdzą, że to logika klasyczna jest zawarta w logice intuicjonistycznej, gdyż logika klasyczna daje się zrekonstruować w logice intuicjonistycznej.

Aby rozstrzygnąć ten problem i zbadać, czy nie jest to spór tylko terminologiczny, musimy zdefiniować niektóre pojęcia.

Definicja 1.

Przez rachunek (logikę) zdań będziemy rozumieć parę uporządkowaną $\langle J, Cn \rangle$, gdzie J jest pewnym językiem, mianowicie algebrą $(Z, o_1, \dots, o_n)$, w której Z jest zbiorem zdań, a operacje $o_1, \dots, o_n$ – spójnikami logicznymi, zaś Cn – operacją konsekwencji określoną na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru zdań Z [$Cn \subseteq P(Z) \times P(Z)$] zdefiniowaną przez zbiór aksjomatów A i zbiór reguł wnioskowania R języka J . Powiemy, że $\alpha \in Cn(X)$ dla pewnego $\alpha \in Z$ i $X \subseteq Z$, zawsze i tylko, gdy istnieje dowód zdania α na podstawie zbioru przesłanek X , zbioru aksjomatów A i zbioru reguł R .

Przykład 1.

Klasyczny rachunek zdań (KRZ) jest to para uporządkowana $\langle J_k, Cn_k \rangle$, gdzie $J_k = \langle Z_k, \sim, \vee, \wedge, \Rightarrow \rangle$, a $Cn_k \subseteq P(Z_k) \times P(Z_k)$ jest zdefiniowana przez aksjomaty:

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow q)$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
3. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
4. $[p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
5. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
6. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
7. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \{(p \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]\}$
8. $p \Rightarrow (p \vee q)$
9. $q \Rightarrow (p \vee q)$
10. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\}$
11. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

oraz regułę podstawiania i regułę odrywania.

Przykład 2.

Intuicjonistyczny rachunek zdań (INT) jest to para uporządkowana $\langle J_i, Cn_i \rangle$, gdzie $J_i = \langle Z_i, \sim, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, \dot{\Rightarrow} \rangle$, a Cn_i jest zdefiniowana przez aksjomaty:

1. $p \dot{\Rightarrow} (q \dot{\Rightarrow} q)$
2. $(p \dot{\Rightarrow} q) \dot{\Rightarrow} [(q \dot{\Rightarrow} r) \dot{\Rightarrow} (p \dot{\Rightarrow} r)]$
3. $[p \dot{\Rightarrow} (q \dot{\Rightarrow} r)] \dot{\Rightarrow} [q \dot{\Rightarrow} (p \dot{\Rightarrow} r)]$
4. $[p \dot{\Rightarrow} (p \dot{\Rightarrow} q)] \dot{\Rightarrow} (p \dot{\Rightarrow} q)$
5. $(p \dot{\wedge} q) \dot{\Rightarrow} p$
6. $(p \dot{\wedge} q) \dot{\Rightarrow} q$
7. $(p \dot{\Rightarrow} q) \dot{\Rightarrow} \{(p \dot{\Rightarrow} r) \dot{\Rightarrow} [p \dot{\Rightarrow} (q \dot{\wedge} r)]\}$
8. $p \dot{\Rightarrow} (q \dot{\vee} p)$
9. $q \dot{\Rightarrow} (p \dot{\vee} q)$
10. $(p \dot{\Rightarrow} r) \dot{\Rightarrow} \{(r \dot{\Rightarrow} q) \dot{\Rightarrow} [(p \dot{\vee} r) \dot{\Rightarrow} q]\}$
11. $(p \dot{\Rightarrow} q) \dot{\Rightarrow} [(p \dot{\Rightarrow} \sim q) \dot{\Rightarrow} \sim p]$
12. $p \dot{\Rightarrow} (\sim p \dot{\Rightarrow} q)$

oraz regułę podstawiania i regułę odrywania.

Spróbujmy teraz sformalizować intuicje dotyczące relacji zawierania zachodzącej między rachunkami zdaniowymi.

Definicja 2.

Dane są dwa rachunki zdaniowe $S_1 = \langle J_1, Cn_1 \rangle$ i $S_2 = \langle J_2, Cn_2 \rangle$. Jeżeli $J_1 = J_2$, to powiemy, że S_1 jest zawarty w S_2 zawsze i tylko, gdy $Cn_1 \subseteq Cn_2$, tzn. $\bigwedge \alpha \in Z_1 = Z_2 \bigwedge X \subseteq Z_1 = Z_2 [\alpha \in Cn_1(X) \Rightarrow \alpha \in Cn_2(X)]$.

Definicja 3.

Dane są dwa rachunki zdaniowe $S_1 = \langle J_1, Cn_1 \rangle$ i $S_2 = \langle J_2, Cn_2 \rangle$. Powiemy, że S_1 jest zawarty w S_2 zawsze i tylko, gdy istnieje funkcja $f: J_1 \Rightarrow J_2$, taka że $\bigwedge \alpha \in Z_1 [\alpha \in Cn_1(\emptyset) \Leftrightarrow f(\alpha) \in Cn_2(\emptyset)]$. Innymi słowy $S_1 \subseteq S_2$, gdy każda teza rachunku S_1 ma swój »odpowiednik« (swoje »tłumaczenie«) wśród tez rachunku S_2 .

Definicja 4.

Dane są dwa rachunki zdaniowe $S_1 = \langle J_1, Cn_1 \rangle$ i $S_2 = \langle J_2, Cn_2 \rangle$. Powiemy, że S_1 jest zawarty w S_2 zawsze i tylko, gdy istnieje funkcja $f: J_1 \Rightarrow J_2$, taka że $\bigwedge \alpha \in Z \bigwedge X \subseteq Z_1 \{\alpha \in Cn_1(X) \Leftrightarrow f(\alpha) \in Cn_2[f(X)]\}$. Innymi słowy $S_1 \subseteq S_2$, gdy istnieje takie »tłumaczenie« wszystkich zdań języka J_1 , że konsekwencje dowolnego zbioru zdań są identyczne z konsekwencjami zbioru »tłumaczeń« tych zdań.

Uwaga.

Wygodnie jest założyć, że zbiór zdań atomowych At jest we wszystkich językach taki sam, tzn. $\bigwedge J = \langle Z, o_1, \dots, o_n \rangle \quad At \subseteq Z$.

Definicja 3'.

Dane są dwa rachunki zdaniowe $S_1 = \langle J_1, Cn_1 \rangle$ i $S_2 = \langle J_2, Cn_2 \rangle$. Powiemy, że S_1 jest zawarty atomowo w S_2 zawsze i tylko, gdy istnieje funkcja $f: J_1 \Rightarrow J_2$, taka że $\bigwedge \alpha \in Z_1 [\alpha \in Cn_1(\emptyset) \Leftrightarrow f(\alpha) \in Cn_2(\emptyset)]$ i $f(At) = At$. Innymi słowy $S_1 \subseteq S_2$, gdy jest zawarty w sensie def. 3 i »tłumaczenie« zdania atomowego jest zdaniem atomowym.

Definicja 4'.

Dane są dwa rachunki zdaniowe $S_1 = \langle J_1, Cn_1 \rangle$ i $S_2 = \langle J_2, Cn_2 \rangle$. Powiemy, że S_1 jest zawarty atomowo w S_2 zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f: J_1 \Rightarrow J_2$, taka że $\bigwedge \alpha \in Z_1 \bigwedge X \subseteq Z_1 \{ \alpha \in Cn_1(X) \Leftrightarrow f(\alpha) \in Cn_2[f(X)] \}$ i $f(At) = At$. Innymi słowy $S_1 \subseteq S_2$, gdy jest zawarty w sensie def. 4 i »tłumaczenie« zdania atomowego jest zdaniem atomowym.

Relacja zawierania w sensie def. 3 bywa nazywana „słabą rekonstruowalnością” (Wojtylak, Wójcicki-Tokarz) albo „interpretowalnością” (Łukasiewicz). Jej wersja atomowa (def. 3') nazywana bywa „atomową słabą odtwarzalnością” (Pogorzelski). Relacja zawierania w sensie def. 4 bywa nazywana „(mocną) rekonstruowalnością” lub „(mocną) odtwarzalnością”. Jej wersja atomowa (def. 4) bywa nazywana „(mocną) atomową odtwarzalnością”.

Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.

INT jest zawarty w sensie def. 2 w KRZ.

(Twierdzenie to jest oparte na założeniu, że oba rachunki są sformułowane w tym samym języku, tzn. że spójniki intuicjonistyczne są identyczne ze spójnikami klasycznymi.)

Dowód.

Chcemy udowodnić, że $Cn_i \subseteq Cn_k$. Aby to zrobić wystarczy udowodnić twierdzenie silniejsze, iż Cn_k jest maksymalną niesprzeczną operacją konsekwencji określoną na języku J_k , tzn. $\bigwedge Cn[(Cn \neq Cn_k \wedge Cn_k \subseteq Cn) \Rightarrow Cn \text{ jest sprzeczną}]$. Dowód tego twierdzenia można znaleźć u Wójcickiego-Tokarza (1971). Bezpośredni dowód twierdzenia 1 można znaleźć np. u Suchonia-Porębskiej (1991).

Twierdzenie 2.

KRZ jest zawarte w sensie def. 3' w INT.

Aby udowodnić to twierdzenie, udowodnimy najpierw trzy proste lematy.

Lemat 1.

Zdania

1. $\sim [\sim (\sim p \wedge \sim p) \wedge \sim p],$
 2. $\sim [p \wedge \sim \sim (\sim p \wedge q)],$
 3. $\sim \{ \sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim \sim [\sim (q \wedge \sim r) \wedge \sim \sim (p \wedge \sim r)] \}$
- są tezami INT.

Dowód.

Dowód tego lematu jest czysto techniczny. Można go znaleźć u Łukasiewicza (1952).

Lemat 2.

Rachunek zdaniowy $KRZ_{\Rightarrow} = (J_{k_{\Rightarrow}}, Cn_{k_{\Rightarrow}})$, gdzie $J_{k_{\Rightarrow}} = (Z_{k_{\Rightarrow}}, \sim, \Rightarrow)$, a $Cn_{k_{\Rightarrow}}$ jest zdefiniowana przez aksjomaty:

1. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p,$
2. $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q),$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r),$

regułę podstawiania i regułę odrywania (jest to implikacyjno-negacyjna wersja klasycznego rachunku zdań) jest zawarty w sensie def. 3' w INT.

Dowód.

Szukana funkcja $f: J_{k_{\Rightarrow}} \rightarrow J_i$ jest określona w następujący sposób:

$f(\alpha) = \alpha$, gdy $\alpha \in At$ (czyli $f(At) = At$),

$f(\sim \alpha) = \sim f(\alpha),$

$f(\alpha \Rightarrow \beta) = \sim [f(\alpha) \wedge \sim f(\beta)].$

Zauważmy, że w takim wypadku aksjomat 1 $KRZ_{\Rightarrow}$ jest równoważny zdaniu (1) z lematu 1, aksjomat 2 – zdaniu (2), aksjomat 3 – zdaniu (3). Reguła odrywania rachunku $KRZ_{\Rightarrow}$ przyjmuje postać reguły: jeśli jest tezą $\sim [f(\alpha) \wedge \sim f(\beta)]$ i jest tezą $f(\alpha)$, to jest też tezą $f(\beta)$. Jest to reguła obowiązująca w intuicjonizmie pod warunkiem, że zdania $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ są zbudowane za pomocą spójników $\sim$ i $\wedge$, co jest zagwarantowane przez sposób konstrukcji funkcji f . Znaczy to, że $\bigwedge \alpha \in Z_{k_{\Rightarrow}} [\alpha \in Cn_{k_{\Rightarrow}}(\emptyset) \Leftrightarrow f(\alpha) \in Cn_i(\emptyset)]$. (Dokładny dowód tego lematu można znaleźć u Łukasiewicza [1952]).

Lemat 3.

Rachunek KRZ jest zawarty w sensie def. 3' w rachunku $KRZ_{\Rightarrow}$.

Dowód.

Lemat ten jest oczywisty, ponieważ KRZ jest nietwórczym (definicyjnym) rozszerzeniem $KRZ_{\Rightarrow}$.

Szukana funkcja f' : $J_k \Rightarrow J_{k \rightarrow}$ jest określona w następujący sposób:

$$f'(\alpha) = \alpha, \text{ gdy } \alpha \in \text{At (czyli } f(\text{At}) = \text{At}),$$

$$f'(\sim \alpha) = \sim f'(\alpha),$$

$$f'(\alpha \Rightarrow \beta) = f'(\alpha) \Rightarrow f'(\beta),$$

$$f'(\alpha \vee \beta) = \sim f'(\alpha) \Rightarrow f'(\beta),$$

$$f'(\alpha \wedge \beta) = \sim [f'(\alpha) \Rightarrow \sim f'(\beta)].$$

Dowód twierdzenia 2.

Szukana funkcja f : $J_k \Rightarrow J_i$ jest złożeniem funkcji f' i f'' . Inny dowód tego twierdzenia można znaleźć u Mlezivy (1966).

Twierdzenie 3.

KRZ jest zawarty w sensie def. 4 w INT.

Dowód.

Szukana funkcja f : $J_k \Rightarrow J_i$ jest określona w następujący sposób:

$$f(\alpha) = \sim \sim \alpha, \text{ gdy } \alpha \in \text{At (czyli } f(\text{At}) \neq \text{At}),$$

$$f(\sim \alpha) = \sim f(\alpha),$$

$$f(\alpha \Rightarrow \beta) = f(\alpha) \Rightarrow f(\beta),$$

$$f(\alpha \vee \beta) = \sim \sim [f(\alpha) \vee f(\beta)] \text{ i}$$

$$f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta).$$

Dokładny dowód tego twierdzenia można znaleźć u Wojtyłaka (1981).

Twierdzenie 4.

KPZ nie jest zawarty w sensie def. 4' w INT.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć u Mlezivy (1966), Wójcickiego-Tokarza (1971).

Podsumowując uzyskane wyniki można powiedzieć, że spór o relacje między KRZ i INT ma charakter czysto terminologiczny. Jego rozstrzygnięcie zależy od tego, w jaki sposób będziemy porównywać oba rachunki logiczne.

Stosując def. 2 porównujemy KRZ i INT »syntaktycznie«, tzn. badamy np., czy zdanie o kształcie „ $p \vee q$ ” należy do zbiorów też obu tych rachunków. W tym sensie prawo wyłączonego środka jest tezą klasyczną, a nie jest tezą intuicjonistyczną.

Stosując def. 3 i def. 4 porównujemy KRZ i INT »semantycznie« – w obu rachunkach szukamy zdań o podobnym znaczeniu. To zadanie spełnia funkcja f . Odpowiednikiem prawa wyłączonego środka zgodnie z funkcją f określoną w twierdzeniu 2 jest zdanie logiki intuicjonistycznej „ $\sim (\sim p \wedge \sim \sim p)$ ”. Odpowiednikiem prawa wyłączonego środka zgodnie z funkcją określoną w twierdzeniu 3 jest zdanie „ $\sim \sim (p \vee \sim p)$ ”.