

Krzysztof Wójtowicz

Problem istnienia we współczesnej filozofii matematyki

Artykuł ten poświęcony jest współczesnej dyskusji na temat istnienia obiektów matematycznych. Zawiera wprowadzenie, w którym omawiane są filozoficzne poglądy Georga Cantora i Kurta Gödla, dwóch wybitnych matematyków, reprezentantów klasycznego platonizmu¹. W części artykułu poświęconej czasom współczesnym omawiane są główne argumenty za stanowiskiem realistycznym (m.in. «argument z niezbędności» Quine'a-Putnama) oraz główne argumenty antyrealistyczne (argument Benacerrafa, nominalizm Fielda i konstruktywizm Chihary). Celem artykułu jest m.in. wykazanie, że argumenty przeciwników realizmu mają poważne braki i opierają się na szeregu nie wytrzymujących krytyki założeń. Omówione są także współczesne warianty realizmu matematycznego (fizykalizm Maddy, strukturalizm Shapiro i Resnika, platonizm Browna i Balaguera) i wskazane są ich słabości. Artykuł koncentruje się na problemach najszerzej dyskutowanych we współczesnej literaturze przedmiotu, dlatego niektóre stanowiska, jak np. konceptualizm Tharpa czy strukturalizm modalny Hellmana nie są w nim omawiane.

Prehistoria

1. *Platonizm Cantora.* Twórcą teorii mnogości, a więc zarazem współtwórcą podwalin współczesnej matematyki jest Cantor. Pod koniec XIX wieku stworzył on podstawy teorii zbiorów, wprowadzając najważniejsze pojęcia i dowodząc szeregu twierdzeń². Cantor zajmował się początkowo analizą matematyczną. Badanie szeregów

¹Zainteresowany czytelnik znajdzie wprowadzenie historyczne, jak również omówienie innych stanowisk np. w R. Murawski, *Filozofia matematyki*, Warszawa 1995.

²Podstawowe twierdzenia udowodnione przez Cantora to twierdzenie o nierównoliczności zbioru ze swym zbiorem potęgowym (znane obecnie jako twierdzenie Cantora) i twierdzenie o równoliczności $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ (po jego udowodnieniu Cantor w jednym ze swoich listów do Dedekinda napisał slynne: „widzę, ale nie wierzę”).

pewnego specjalnego typu doprowadziło go do pojęcia ciągu pozaskończonego. Ta obserwacja legła u podstaw jego teorii³.

Cantor interesował się jednak nie tylko formalnymi aspektami stworzonej przez siebie teorii. W nie mniejszym stopniu ważne były dla niego jej filozoficzne motywacje i implikacje. Cantor interesował się filozofią i posiadał bogatą bibliotekę dzieł klasyków (m.in. Platona, Arystotelesa, Tomasza z Akwinu, Kartezjusza, Leibniza i Kanta), które dobrze znał. W późniejszym okresie życia prowadził nawet wykłady z filozofii. Z biegiem czasu coraz więcej uwagi poświęcał metafizyce, zajmując się analizą filozoficznych aspektów teorii mnogości.

Dla Cantora teoria mnogości stanowiła część metafizyki. W liście do Felixa Kleina, wydawcy „Mathematische Annalen”, Cantor prosił o przyjęcie do druku jego artykułu dotyczącego teorii mnogości, pisząc, że „...poruszane zagadnienia są czysto matematyczne, pomimo, iż [...] byłem zmuszony poruszyć również szereg związanych z nimi kwestii filozoficznych. Te dwa aspekty, są niestety tak ściśle związane, że byłoby mi bardzo trudno oddzielić treści matematyczne od innych”⁴. Konsekwentnie, w stosunku do przedmiotu swych badań Cantor był realistą, przekonany o obiektywnym istnieniu obiektów matematycznych. W jednym z listów do Mittag-Lefflera napisał, że „w stosunku do treści moich prac jestem jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem”.

Cantor wyróżniał kilka rodzajów nieskończoności:

- nieskończoność potencjalną (niewłaściwą);
- nieskończoność aktualną, bez istnienia której nie byłoby możliwe badanie nieskończoności potencjalnej.

Nieskończoność aktualna rozpada się z kolei na dwie kategorie:

- powiększalną, czyli pozaskończoność;

³Cantor udowodnił twierdzenie dotyczące jednoznaczności przedstawienia funkcji danej szeregiem trygonometrycznym. (Są to funkcje postaci: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$). Jeśli $f(x) = 0$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, to wówczas $a_n = b_n = 0$). Założenia pierwotnej, udowodnionej w 1870 roku wersji twierdzenia, dotyczące zbieżności badanego szeregu do 0 na całym przedziale $(-\pi, \pi)$ udało się Cantorowi osłabić. Twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia zachodzi również wtedy, gdy szereg trygonometryczny jest zbieżny do 0 tylko dla $x \in (-\pi, \pi) \setminus P$, gdzie P jest pewnym zbiorem „punktów wyjątkowych”. Aby podać opis zbiorów punktów wyjątkowych P , dla których zachodzi twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia Cantor wprowadził pojęcie pochodnej zbioru: P' to zbiór punktów skupienia P (mówiąc nieformalnie, jest to zbiór wszystkich granic wszystkich ciągów o wartościach w P), $n+1$ -sza pochodna P^{n+1} jest zdefiniowana jako $(P^n)'$. Cantor zaobserwował, że ciąg pochodnych zbioru jest ciągiem zstępującym, a następnie zdefiniował Q jako przecięcie tych (przeliczalnie wielu) zbiorów. Otrzymany w ten sposób zbiór Q określił jako „pochodną rzędu ω ”, gdzie ω jest pierwszą liczbą porządkową nieskończoną. Oczywiście zbiór Q też ma swoją pochodną, która jest pochodną rzędu $\omega+1$ zbioru P . Proces tworzenia pochodnych zbioru można kontynuować, „numerując” je kolejnymi pozaskończonymi liczbami porządkowymi.

⁴Cytat za W. Purkert, *Cantor's Views on the Foundations of Mathematics*, w: D.E. Rowe, J. McCleary (red.), *The history of modern mathematics*, San Diego 1989, s. 49-65.

- niepowiększalną, czyli Absolut (*Transfinitum in Deo*)⁵.

W tworzonej przez siebie teorii nieskończoności Cantor dostrzegał aspekt teologiczny. Prowadził korespondencję z teologami katolickimi i zależało mu na tym, aby sformułować interpretację swej teorii zgodną z teologią⁶. Według Cantora właśnie teologia (a nie matematyka) jest nauką, która powinna zajmować się absolutną nieskończonością, zaś pozaskończoność winna być przedmiotem badań metafizyki i matematyki.⁷

2. *Platonizm Gödla*. Jako reprezentantów stanowiska platonistycznego wśród matematyków należy, obok Cantora, Hardy'ego⁸ (i wielu innych) wymienić przede wszystkim Gödla, najwybitniejszego logika XX wieku⁹. Podobnie jak Cantor, Gödel interesował się filozofią i z biegiem lat poświęcał jej coraz więcej uwagi, zwłaszcza zaś metafizyce.¹⁰

Gödel jest reprezentantem klasycznego platonizmu. Twierdzi, że matematyka posiada przedmiot badań, a mianowicie świat obiektów abstrakcyjnych. Obiekty te istnieją w sposób niezależny od matematyków i ich działalności poznawczej czy aktywności umysłowej. Według Gödla założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu ciał fizycznych¹¹. Matematyka oparta jest

⁵ Za najlepsze uzasadnienie istnienia tej ostatniej Cantor uważał uzasadnienie podane przez Świętego Augustyna w *De civitate Dei* (*O państwie Bożym*) (por. Purkert, *Cantor's Views on the Foundations of Mathematics*, dz. cyt.).

⁶ Cantor określał ciąg alefów jako stopnie do Bożego tronu. Omówienie tego aspektu dzieła Cantora znajduje czytelnik w R. Murawski, G. *Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne”, 11-12 (228-229), 1984, s. 75-88; Purkert, *Cantor's Views on the Foundations of Mathematics*, dz. cyt.

⁷ „Do teologii spekulatywnej należy badanie niekończoności absolutnej i ustalenie, co można o niej powiedzieć w ludzki sposób. Z drugiej strony, pytania dotyczące pozaskończoności są przedmiotem badań metafizyki i matematyki” (cytat za I. Jane, *The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set*, „Erkenntnis”, 42, 1995, s. 375-402.)

⁸ „Osobiście zawsze uważałem matematyka w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe.” G.H. Hardy, *Mathematical Proof*, „Mind”, 38, 1929, s. 1-25.

⁹ Dorobek Gödla obejmuje m.in. dowód pełności logiki predykatów pierwszego rzędu, twierdzenie o niezupelnosci arytmetyki (zwane pierwszym twierdzeniem Gödla), twierdzenie o niedowodliwosci niesprzeczności arytmetyki (i teorii mnogości) środkami dowodowymi tej teorii, dowód niesprzeczności aksjomatu konstruowalności z teorią mnogości Zermelo-Fraenckla, a co za tym idzie niesprzeczności pewnika wyboru i hipotezy *continuum*, a także prace dotyczące nierozstrzygalności równań diofantycznych.

¹⁰ Wiele informacji na temat filozoficznych poglądów Gödla można zaczerpnąć z monografii H. Wanga, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass. 1987. O zainteresowaniach filozoficznych Gödla świadczy fakt, że pozostawił w swej spuściźnie kilkanaście notatników poświęconych filozofii.

¹¹ K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, w: Benacerraf P., Putnam H. (red.) *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs 1964, s. 211-232.

na aksjomatach posiadających rzeczywistą treść, nieredukowalną do prawd o przedmiotach innej kategorii, w szczególności do prawd czysto logicznych¹².

Aby wyjaśnić, w jaki sposób dochodzimy do poznania prawd matematyki, Gödel posługuje się pojęciem intuicji matematycznej, będącej pewnym szczególnym rodzajem percepcji. Argumentem na rzecz istnienia intuicji jest fakt, że „aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe”¹³. Intuicja dostarcza nam wiedzy na temat obiektów matematycznych, przy czym Gödel nie twierdzi, że jest to wiedza natychmiastowa, dająca bezpośredni wgląd w świat matematyki. Według Gödla idee nasze formują się pod wpływem „czegoś, co jest dane w sposób natychmiastowy. Lecz tym czymś nie są, a w każdym razie nie są w pierwszym rzędzie, wrażenia zmysłowe”¹⁴. Dane te nie są jedynie czymś subiektywnym, lecz „mogą reprezentować aspekt obiektywnej rzeczywistości, ale, w przeciwieństwie do danych zmysłowych, ich obecność w nas może wynikać z innego związku pomiędzy nami a rzeczywistością”¹⁵.

Intuicja nie jest jedynym źródłem wiedzy matematycznej. Drugim kryterium prawdziwości aksjomatów jest ich rola w matematyce, w porządkowaniu teorii „niższego szczebla”. Niektóre aksjomaty, same z siebie nieoczywiste, mogą być zaakceptowane na mocy „kryterium owocności”¹⁶. Pewnego rodzaju podsumowaniem poglądów Gödla na kwestię prawdziwości aksjomatów jest następujący cytat:

„Obok intuicji matematycznej istnieje inne (choć jedynie uprawdopodobniające) kryterium prawdziwości aksjomatów matematycznych, a mianowicie ich owocność w matematyce i. można by dodać, w fizyce”¹⁷.

Realistyczne poglądy Gödla miały znaczenie dla jego badań logicznych. Jak sam pisał w jednym z listów do Hao Wanga¹⁸, umożliwiły mu „uwolnienie się od przesądów epoki” i swobodne posługiwanie się nieefektywnymi, niekonstruktywnymi metodami¹⁹.

Czasy nowsze i współczesne

3. *Argument «z niezbędności»*. Zwolennikom realizmu matematycznego argumentów na rzecz ich tez ontologicznych dostarcza teoria Quine’a. Są to argumenty innego

¹² Tamże, s. 224.

¹³ K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, w: *Philosophy of Mathematics*, dz. cyt., s. 258-273.

¹⁴ Tamże, s. 271.

¹⁵ Tamże, s. 272.

¹⁶ Tamże, s. 265.

¹⁷ Tamże, s. 272.

¹⁸ Por. H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, New York 1974.

¹⁹ W szczególności dotyczy to zaakceptowania definicji niepredykatywnych (Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, dz. cyt.) i odrzucenia konstruktywistycznych ograniczeń stawianych twórczości matematycznej. Na związek technicznych idei i wyników Gödla z jego poglądami filozoficznymi wskazuje C. Parsons w *Introductory note to 1946*, w: K. Gödel: *Collected Works II*, Feferman S. (red.), New York 1990, s. 144-149.

typu, niż te, które znajdziemy u Gödla. Dwa znane artykuły Quine'a²⁰ zawierają polemikę z koncepcją Carnapa. Przypomnijmy, że według tego ostatniego analizy lingwistyczne nie upoważniają do wyciągania jakichkolwiek wniosków dotyczących ontologii. W szczególności stosowanie języka odwołującego się do przedmiotów abstrakcyjnych nie implikuje konieczności zaakceptowania ontologii platonistycznej²¹. Kwestia wyboru form językowych nie ma nic wspólnego z zagadnieniem istnienia, a jedynym kryterium tego wyboru jest skuteczność używanego języka.

Aby uzasadnić swoje stanowisko Carnap posługuje się znanym podziałem zdań na analityczne i syntetyczne. Zdania syntetyczne odnoszą się do badanej rzeczywistości, natomiast analityczne są prawdziwe jedynie na mocy przyjętych przez nas postulatów znaczeniowych. Do tej ostatniej klasy należą zdania matematyki.

Teorię Carnapa odrzuca Quine. W *Dwóch dogmatach empiryzmu* kwestionuje możliwość dokonania podziału zdań na analityczne i syntetyczne, na którym opiera się koncepcja Carnapa:

„Jesteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent fakualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent fakualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne, jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary”²².

W analizach ontologicznych nie można zatem ignorować zdań dotyczących obiektów abstrakcyjnych, w szczególności obiektów matematycznych. Po odrzuceniu dychotomicznego podziału zdań na analityczne i syntetyczne upada bowiem argument, że zdania matematyki są prawdziwe jedynie na mocy postulatów znaczeniowych. Powstaje zatem problem określenia zobowiązań ontologicznych teorii naukowych, tzn. określenia, istnienie jakiego rodzaju bytów postuluje dana teoria. Według Quine'a, z problemem tego typu spotykamy się już w fazie formowania się naszego zdroworozsądkowego obrazu świata²³, a następnie w nauce. Jak pisze: „nauka jest kontynuacją zdrowego rozsądku i podtrzymuje zdroworozsądkową zasadę rozbudowywania ontologii dla uproszczenia teorii”²⁴.

Podobne do Quine'a stanowisko zajmuje Putnam. Według niego spójna teoria świata powinna postulować istnienie wszystkich przedmiotów, o których mówi. Skoro zatem kwantyfikacja po obiektach matematycznych jest istotnym składnikiem każdej

²⁰ W.V.O. Quine, *O tym co istnieje*, w: *Z punktu widzenia logiki*, tłum. Barbara Stanosz, Warszawa 1969, s. 9-34; *Dwa dogmaty empiryzmu*, w: *Z punktu widzenia logiki*, dz. cyt., s. 35-70.

²¹ R. Carnap, *Empiricism, Semantics and Ontology*, w: *Philosophy of Mathematics*, dz. cyt., s. 258-273.

²² W.V.O. Quine, *Dwa dogmaty empiryzmu*, dz. cyt., s. 57-58.

²³ W.V.O. Quine, *O tym co istnieje*, dz. cyt., s. 31.

²⁴ W.V.O. Quine, *Dwa dogmaty empiryzmu*, dz. cyt., s. 68.

teorii fizycznej, to przyjmując istnienie obiektów fizycznych, o których dana teoria mówi, musimy także założyć istnienie obiektów matematycznych²⁵. Argument tego typu nosi w literaturze nazwę argumentu z niezbędności (*indispensability argument*)²⁶.

Realizm Quine'a-Putnama opiera się na innych przesłankach i ma inny charakter niż platonizm Gödla. Według Gödla obiekty matematyczne tworzą pozaczasoprzestrzenną rzeczywistość, której poznanie umożliwia nam intuicja matematyczna. Ona umożliwia nam uznanie pewnych aksjomatów za oczywiste. Prawdziwość innych poznajemy obserwując ich konsekwencje i badając ich owocność. Gödel wychodzi zatem od praktyki matematycznej, zaś platonizm jest według niego jedynym stanowiskiem umożliwiającym stworzenie spójnej „teorii matematyki”²⁷. Z kolei Quine i Putnam wychodzą od rozważań dotyczących struktury nauki, w szczególności fizyki. Ponieważ nie da się nauki rozłożyć (tak jak to postulował Carnap) na składową analityczną i syntetyczną, zatem musimy konsekwentnie zaakceptować pełną ontologię, tzn. uznać istnienie wszystkich przedmiotów, o jakich mowa w naukowym dyskursie. W ujęciu Quine'a i Putnama „stosowalność pociąga za sobą istnienie”.

Zarówno teoria Gödla, jak i teoria Quine'a-Putnama mają swoje słabości. Quine i Putnam nie mówią nic na temat tego, czy i w jaki sposób poznajemy świat obiektów matematycznych. Prawdy matematyki, według Gödla wieczne i niezmiennie (przypomnijmy, że problem *continuum*²⁸ uważał za naukowy problem dotyczący rzeczywistości!), w myśl quasi-empirystycznego stanowiska Quine'a i Putnama są zależne od stanu nauki. Jeśli jakiś fragment matematyki nie ma zastosowań, to nie można powiedzieć, że jest prawdziwy - stanowi bowiem niezinterpretowany system formalny²⁹. Z drugiej strony, w ramach koncepcji Gödla, w odróżnieniu od quasi-empiryzmu Quine'a-Putnama, trudno jest w zadowalający sposób wyjaśnić fakt stosowalności matematyki. Argument Quine'a-Putnama sformułowany jest w sposób czysto jakościowy; nie pozwala na przeprowadzenie dokładniejszych analiz ontologicznych. Propozycję uszczegółowienia argumentu Quine'a-Putnama i nadania mu bardziej precyzyjnej postaci poprzez wykorzystanie pewnych wyników z zakresu podstaw

²⁵ H. Putnam, *What is Mathematical Truth?*, w: *Mathematics, matter and method: philosophical papers*, t.1, wyd. II, Cambridge 1975, s. 60-78.

²⁶ Zwróćmy uwagę na fakt, że argumenty tego typu nie są w filozofii nauki, w szczególności w filozofii matematyki, nowe. Cantor posługiwał się tego typu argumentem dowodząc istnienia liczb pozakończonych — bez nich bowiem nie jest możliwe wyjaśnienie zjawisk naturalnych. W jakiś sensie podobna jest argumentacja Zermelo za przyjęciem pewnika wyboru (jest to „wewnątrzmatematyczny argument z niezbędności”).

²⁷ K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, dz. cyt., s. 220.

²⁸ Przypomnijmy, że hipoteza *continuum* (w literaturze oznaczana standardowo CH) mówi, że moc zbioru potęgowego liczb naturalnych (czyli moc *continuum*) jest następną mocą nieskończoną po mocy zbioru liczb naturalnych. Mówi ona zatem, że pomiędzy mocą przeliczalną a *continuum* nie ma mocy pośredniej. Teoria mnogości ZFC nie rozstrzyga problemu CH - wiemy, że zarówno ZFC+CH, jak i ZFC+non-CH są teoriami niesprzecznymi.

²⁹ Por. W.V.O. Quine, recenzja z C. Parsons: *Mathematics in Philosophy*, „Journal of Philosophy”, 81, 1984, s. 783-794.

matematyki znaleźć można w pracach K. Wójtowicza, *Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego i Reverse Mathematics and the Indispensability Argument*³⁰.

4. „Wyzwanie Benacerrafa”. W roku 1973 Paul Benacerraf opublikował klasyczny już dziś artykuł *Mathematical Truth*. Przedstawił tam główne problemy, z jakimi musi uporać się platonizm. Benacerraf wychodzi od pewnych założeń metodologicznych, stawianych filozofii matematyki. Ma ona spełniać następujące warunki:

i) powinna umożliwić sformułowanie jednolitej teorii semantycznej (w stylu Tarskiego) dla teorii naukowych, tzn. takiej, która odnosi się do całego języka, w szczególności do terminów matematycznych i niematematycznych;

ii) powinna umożliwić wyjaśnienie pojęcia prawdy matematycznej w sposób zgodny z „rozsądną epistemologią”.

Główna teza Benacerrafa głosi, że nie jest możliwe pogodzenie tych dwóch warunków. Swoje rozumowanie Benacerraf opiera na poniższych przesłankach:

i) przyjmuje kauzalną teorię wiedzy³¹;

ii) stwierdza, że liczby (czy ogólniej przedmioty matematyczne) jako abstrakcyjne nie oddziałują przyczynowo;

iii) odrzuca percepcję pozazmysłową jako źródło wiedzy.

Z tych trzech przesłanek Benacerraf wyprowadza wniosek, że klasyczny platonizm zaproponowany przez Gödla nie spełnia wymogów metodologicznych stawianych teorii nauki, a tym samym jest nie do przyjęcia. Według Benacerrafa oczywiste jest, że postulowana przez Gödla koncepcja istnienia pozazmysłowej percepcji obiektów czy pojęć abstrakcyjnych jest zbyt mało precyzyjna. Brak w niej bowiem wyjaśnienia związku pomiędzy naszymi zdolnościami poznawczymi a przedmiotem wiedzy³².

Artykuł Benacerrafa stał się przedmiotem ożywionej dyskusji (Maddy określa wręcz okres po 1973 w filozofii matematyki jako „erę post-Benacerrafowską”³³).

Zdecydowanie krytycznie na temat Gödłowskiej teorii intuicji wypowiada się także Chihara. Twierdzi, że nie mogłaby być ona zaakceptowana przez nauki doświadczalne

³⁰ Chodzi o wyniki uzyskane w ramach tzw. „matematyki odwrotnej”. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy np. do R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne” XXX, 1993, s. 51-72.; K. Wójtowicz, *Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego*, „Filozofia Nauki”, nr 4, 1995 oraz tenże, *Reverse Mathematics and the Indispensability Argument*, w: Jadacki J., Paśniczek J. (red.) *Lwow-Warsaw School: New Generation*, Amsterdam (w przygotowaniu).

³¹ Podstawowe założenia kauzalnej teorii wiedzy zostały sformułowane przez A.I. Goldmana w jego klasycznym już dziś *A Causal Theory of Knowing*, „Journal of Philosophy”, 64, 1967, s. 357-72. Nie wnikając w szczegóły, zwolennicy tej koncepcji twierdzą, że warunkiem koniecznym posiadania wiedzy na temat jakiegos rodzaju obiektów jest istnienie związku kauzalnego pomiędzy tymi obiektami a nami.

³² P. Benacerraf, *Mathematical Truth*, „Journal of Philosophy”, 70, 1973, s. 661-680.

³³ Por. P. Maddy, *Philosophy of Mathematics: Prospects for the 1990s*, „Synthese”, 88, 1991, s. 155-164.

jako nieprecyzyjna i pozbawiona podstaw empirycznych³⁴. Według Chihary wyjaśnienie zgodności w rozumowaniach i wnioskach matematyków nie wymaga założenia o istnieniu wspólnego, obiektywnie istniejącego przedmiotu badań matematyki³⁵. Chihara proponuje przyjąć stanowisko naturalistyczne i tłumaczyć podobieństwo w intuicjach matematyków podobieństwem ich struktury biologicznej.

W podobnym duchu wypowiadają się Gottlieb:

„Obiekty matematyczne są tajemnicze i powinniśmy za wszelką cenę ich unikać. Są szczególnie szkodliwe w matematyce. [...] Tajemnicą jest, w jaki sposób my, byty konkretne, mielibyśmy poznawać byty abstrakcyjne i ogólnie rzecz biorąc jest wątpliwe, czy abstrakty mogą oddziaływać z konkretnymi”³⁶.

i Field:

„Nie ma związków przyczynowych pomiędzy obiektami z platońskiego królestwa i nami; w jaki zatem sposób możemy wiedzieć, co się w tym królestwie dzieje? Wydaje się, że aby odpowiedzieć na to pytanie musielibyśmy postulować istnienie jakiegoś afizycznego związku, jakiejś tajemniczej mocy umysłu...”³⁷.

Można wyróżnić dwie podstawowe linie obrony zwolenników stanowiska realistycznego przeciwko rozumowaniu Benacerrafa:

1. Odrzucenie (poprzez wskazanie słabości czy nieuzasadnionych założeń) kauzalnej teorii wiedzy (tak robią m.in. Brown, Steiner, Liston);

2. Zaakceptowanie „hipotezy interakcjonistycznej”³⁸ i próba sformułowania epistemologii zgodnej ze standardami naturalistycznymi³⁹.

³⁴C. Chihara, *A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? And Can We Perceive Them?*, „Philosophical Review”, 91, 1982, s. 211-27.

³⁵Tamże, s. 217-218.

³⁶D. Gottlieb, *Ontological Economy: Substitutional Quantification and Mathematics*, Oxford 1980, s. 11.

³⁷H. Field, *Realism and Anti-realism about Mathematics*, „Philosophical Topics”, 13, 1982, s. 45-69.

³⁸Sformułowania „hipoteza interakcjonistyczna” używa M. Liston w *Taking Mathematical Fictions Seriously* („Synthese”, 95, 1993, s. 433-458) na określenie stanowiska, w myśl którego posiadanie wiedzy o jakimkolwiek przedmiocie wymaga oddziaływania przyczynowego pomiędzy tym przedmiotem a nami.

³⁹Najogólniej rzecz biorąc, naturalizacja epistemologii polega na odrzuceniu metafizycznej tezy o istnieniu „filozofii pierwszej” i przyjęciu tezy o tym, że przejście pomiędzy filozofią a nauką jest ciągłe. W ujęciu tym badania filozoficzne nie powinny być pierwotne w stosunku do nauki, a wręcz przeciwnie, powinny opierać się na naukach szczegółowych. W ujęciu radykalnym filozofia (w szczególności epistemologia) ma ustąpić pola naukom empirycznym. Wyraźnie mówi o tym Quine: „...naturalizm: uznanie, że rzeczywistość jest identyfikowana i opisywana w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii” (W.V.O. Quine, *Rzeczy i ich miejsca w teoriach*, w: T. Szubka (red.), *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin 1995, s. 31-51). Zwięzły opis problematyki związanej z epistemologią naturalistyczną zawiera tekst K. Dorożyńskiego, *Epistemologia naturalistyczna*, w: A. Bronk (red.), *Filozofować dziś*, Lublin 1995. (Czytelnik znajdzie tam również szereg krytycznych uwag pod jej adresem jako teorii będącej współczesną kontynuacją „mitu scjentyistycznego”.) Wśród filozofów matematyki stanowisko naturalistyczne zajmują np. P. Kitcher (*Mathematical*

Omówmy je bardziej szczegółowo.

Ad. 1) Krytycy kauzalnej teorii wiedzy wskazują np. na fakt, że sami twórcy kauzalnej teorii wiedzy mieli na myśli wiedzę przyrodniczą, a więc ich teoria nie może być automatycznie stosowana do badań nad wiedzą dotyczącą obiektów abstrakcyjnych⁴⁰. Brown twierdzi, powołując się na eksperyment Einsteina-Podolsky'ego-Rosena i nierówności Bella, że kauzalna teoria wiedzy jest fałszywa⁴¹. Według Listona warunkiem posiadania rzetelnej wiedzy jest posiadanie dobrej teorii, a nie interakcja z przedmiotem wiedzy⁴². Steiner wskazuje na trudności, jakie niesie ze sobą kauzalna teoria wiedzy i wielość możliwych jej sformułowań i interpretacji⁴³.

Ad. 2) Taką strategię obrali na przykład Maddy i Resnik. Ich koncepcje zostaną przedstawione później.

5. *Argument z niezbędności ponownie rozpatrzony*. Zarzuty Benacerrafa dotyczą klasycznej epistemologii platonistycznej. Jest to zatem atak na teorię intuicji matematycznej, będącą fundamentem „platonizmu epistemologicznego”⁴⁴. Zwolennicy stanowiska antyrealistycznego podejmują również próby podważenia argumentu z niezbędności Quine'a-Putnama, będącego jednym z ważniejszych argumentów na rzecz „platonizmu ontologicznego”.

5.1 *Fikcjonalizm Fielda*. Najgłośniejszą i najszerzej dyskutowaną próbą obalenia tego argumentu na rzecz realizmu matematycznego jest próba podjęta przez Fielda w jego *Science without Numbers*. Przedstawimy tu w skrótovej formie zarys jego koncepcji⁴⁵.

Naturalism w: W. Aspray, P. Kitcher (red.), *History and Philosophy of modern mathematics*, Minneapolis 1988) i P. Maddy (*Taking Naturalism Seriously*, w: Prawitz, Skyrms and Westerstaahl (red.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, 1994).

⁴⁰ Por. np. uwagę Lewisa: „Kauzalne wyjaśnienia wiedzy są bardzo dobre tam, gdzie mogą być zastosowane, ale jeśli próbuje się je stosować jako teorie ogólne, to matematyka je falsyfikuje” (D.K. Lewis, *On the Plurality of Worlds*, Oxford 1986, s. 109).

⁴¹ J. R. Brown, *It in the Sky*, w: A.D. Irvine (red.), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht 1990.

⁴² M. Liston, *Taking Mathematical Fictions Seriously*, „Synthese”, 95, 1993, s. 433-458.

⁴³ M. Steiner, *Platonism and the Causal Theory of Knowledge*, „Journal of Philosophy”, 70, 1973, s. 57-66.

⁴⁴ Terminologia ta stosowana jest np. przez Steinera. Pod pojęciem „platonizmu ontologicznego” rozumie on doktrynę filozoficzną, w myśl której prawdy matematyki opisują nieskończony świat obiektów matematycznych, natomiast pod pojęciem „platonizmu epistemologicznego” doktrynę, w myśl której możemy poznać te prawdy poprzez pewnego rodzaju szczególny rodzaj zdolności

⁴⁵ Zainteresowany czytelnik znajdzie dokładniejsze omówienie w: T. Bigaj, *Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce*, „Filozofia Nauki”, nr 3-4, 1994, s. 161-174.; K. Wójtowicz, *Czy matematyka jest niezbędna w nauce?*, „Filozofia Nauki”, nr 3-4, 1994, s. 141-160.

Field uważa argument z niezbędności za „jeden poważny argument na rzecz stanowiska realistycznego”⁴⁶. Jego celem jest podważenie przesłanek tego argumentu. Nie podejmując polemiki z samym rozumowaniem typu „stosowalność pociąga za sobą istnienie”, Field stara się wykazać, że przesłanki argumentu z niezbędności nie są spełnione, czyli że nie jest prawdą, że matematyka jest niezbędna w nauce. Według Fielda, każda teoria fizyczna daje się przedstawić w syntetycznej, nominalistycznie akceptowalnej wersji, która ma taką samą siłę eksplanacyjną, jak teoria posługująca się instrumentarium matematycznym. Istotne jest jednak to, że w zasadzie moglibyśmy z tego instrumentarium zrezygnować. Przydatność matematyki Field wyjaśnia posługując się pojęciem *nietwórczości*⁴⁷. Matematyka ma właśnie własność nietwórczości, co znaczy po prostu tyle, że wszelkie nominalistyczne wnioski na temat świata fizycznego uzyskane przy pomocy instrumentarium matematycznego można też wyprowadzić w ramach samej tylko teorii nominalistycznej. Wynika stąd, że matematyka jest wprawdzie przydatna, bo pozwala na skrócenie dowodów i uproszczenie rozumowań, ale nie jest niezbędna - ma co najwyżej charakter użytecznej fikcji.

Swoje rozumowanie Field ilustruje przykładem nominalistycznego przeformułowania teorii grawitacji Newtona. Opiera się przy tym na pewnych założeniach dotyczących struktury czasoprzestrzeni - według Fielda punkty i obszary czasoprzestrzeni istnieją jako odrębne byty (substantywizm). Dopiero to kontrowersyjne założenie umożliwia mu przeprowadzenie niezbędnych konstrukcji.

Koncepcja Fielda stała się przedmiotem zdecydowanej krytyki. Zarzuty stawiane Fieldowi można podzielić na kilka zasadniczych grup.

1) Zarzuty wobec substancywistycznej koncepcji czasoprzestrzeni. Tego typu zarzuty pojawiają się np. w komentarzach Resnika⁴⁸. Brak jest danych obserwacyjnych dotyczących samych obszarów czasoprzestrzeni (por. uwagę u Malamenta w *Review of Science Without Numbers*⁴⁹, że punkty czasoprzestrzeni są lokacjami dla pól i obiektów fizycznych i że to one oddziałują kauzalnie, nie zaś ich lokacje). Resnik twierdzi, że argumenty Fielda dotyczące przyczynowego oddziaływania punktów i obszarów czasoprzestrzeni przypominają argument typu: „liczby oddziałują przyczynowo, bo gdy liczba osób w pomieszczeniu wzrasta, to temperatura wzrasta”. Field nie potrafi też podać epistemologii dla swojej teorii obszarów czasoprzestrzeni - według Resnika przypomina ona raczej epistemologię dla obiektów abstrakcyjnych niż fizycznych. Podobnie Malament w *Review of Science Without Numbers* wyraża wątpliwość, czy

⁴⁶H. Field, *Science Without Numbers*, Oxford 1980, s. 5.

⁴⁷Niech (L, Cn) i (L', Cn') będą dwoma logikami, przy czym $L \subseteq L'$, zaś T i T' teoriami sformułowanymi w tych językach. Mówimy, że T' jest nietwórczym rozszerzeniem T , jeśli $Cn'(T') \cap L = Cn(T)$. Ogólniej, T' jest nietwórczym rozszerzeniem T ze względu na pewną klasę zdań F w języku L , jeśli $Cn'(T') \cap F = Cn(T) \cap F$.

⁴⁸Por. D.M. Resnik, *How Nominalist is Hartry Field's Nominalism?*, „Philosophical Studies”, 47, 1985, s. 163-181.

⁴⁹D. Malament, *Review of Science Without Numbers*, „Journal of Philosophy”, 79, 1982, s. 523-534.

punkty i obszary czasoprzestrzeni można nazwać obiektami fizycznymi, skoro nie mają ani masy, ani pola; nie podlegają też zmianom. Według Urquharta różnica pomiędzy obszarami czasoprzestrzeni a zbiorami punktów jest głównie terminologiczna, gdyż Field dopuszcza tworzenie obszarów czasoprzestrzeni w zupełnie dowolny sposób⁵⁰.

Skoro Field akceptuje wszystkie obszary czasoprzestrzeni (która przypomina do złudzenia $\mathbf{R}^n$), to pojawia się cała masa pytań, będących tak naprawdę przeformułowaniami teoriomnogościowych zagadnień dotyczących *continuum*: Czy hipoteza *continuum* zachodzi dla czasoprzestrzeni? Jakie zbiory są zdeterminowane? Field nie udziela odpowiedzi na powyższe pytania i nie wyjaśnia, w jaki sposób możemy je uzyskać w nominalistycznej fizyce. Przypomnijmy tutaj, że zdania te są niezależne od ZFC i wymagają przyjęcia silnych założeń (np. aksjomatu konstruowalności albo istnienia liczby mierzalnej).

2) Zarzuty dotyczące technicznych aspektów programu Fielda. Shapiro w *Conservativeness and Incompleteness*⁵¹ wskazuje na fakt, że Field nie uwzględnił należycie różnicy pomiędzy wynikaniem syntaktycznym a semantycznym. Wprawdzie w logice elementarnej są one, na mocy twierdzenia o pełności, tym samym, ale przecież Field posługuje się znacznie silniejszą logiką. Nie można zatem utożsamiać nietwórczości semantycznej i syntaktycznej. Skoro jednak według Fielda rola matematyki w nauce polega jedynie na skracaniu dedukcji, to musi mu chodzić o nietwórczość syntaktyczną. Shapiro pokazuje, że przy przyjęciu stosowanej przez Fielda logiki (i przy przyjęciu naturalnego założenia, że mówimy o teoriach rekurencyjnie aksjomatyzowalnych⁵²) istnieją zdania nominalistyczne dowodliwe w teorii zmatematyzowanej, a niedowodliwe w samej tylko teorii nominalistycznej.

3) Innego rodzaju zarzuty dotyczą samej możliwości nominalistycznego przeformułowania nauki. Malament wskazuje na fakt (przywołując przykład teorii pola Kleina-Gordona), że znominalizowana fizyka Fielda jest w stanie rozwiązać tylko niektóre z powstających problemów⁵³. Twierdzi również, że program nominalizacji Fielda „nawet jeśli jest skuteczny w stosunku do teorii grawitacji Newtona, to prawie

⁵⁰ A. Urquhart A., *The Logic of Physical Theory*, w: *Physicalism in Mathematics*, dz. cyt. s. 145-154.

⁵¹ S. Shapiro, *Conservativeness and Incompleteness*, „Journal of Philosophy”, 60, 1983, s. 524-531.

⁵² To założenie jest uzasadnione. Field mówi o „atrakcyjnych nominalistycznych sformułowaniach”, w których można zrekonstruować fizykę. Rekurencyjna aksjomatyzowalność takiej teorii jest na pewno warunkiem koniecznym uznania jej za atrakcyjne narzędzie dedukcji.

⁵³ Teoria pola Kleina-Gordona bada struktury postaci $((M,d),\Phi)$, gdzie (M,d) to czasoprzestrzeń Minkowskiego, z $\Phi:M \rightarrow \mathbf{R}$ to funkcja spełniająca równanie $\Phi = 0$. W teorii tej dowodzone są twierdzenia trzech rodzajów:

1. Dotyczące poszczególnych modeli (tj. czasoprzestrzeni Minkowskiego).
2. Dotyczące istnienia modeli o pewnych cechach.
3. Dotyczące całych klas modeli.

Według Malamenta w teorii Fielda można dowodzić jedynie twierdzenia z klasy 1.

na pewno nie powiedzie się w przypadku innych ciekawych teorii fizycznych”⁵⁴. Malament jako przykłady takich teorii podaje mechanikę Hamiltonowską i kwantową. Liston⁵⁵ twierdzi, że nie da się „znominalizować” teorii drgań opartej o analizę harmoniczną Fouriera. Burgess⁵⁶ wskazuje na fakt, że jest niemożliwe, aby rzeczywiście uprawiać fizykę tak, jak to proponuje Field. W kontekście odkrycia metody matematyczne odgrywają bowiem fundamentalną rolę. Gdyby fizyka rzeczywiście została znominalizowana, to być może przestałaby się rozwijać, gdyż bardzo wyrafinowane, abstrakcyjne i pozornie w żaden sposób nie związane z przedmiotem badań techniki matematyczne okazują się być bardzo owocne. Burgess wskazuje też na fakt, że Field wprowadził podał syntetyczną wersję teorii grawitacji Newtona w płaskiej czasoprzestrzeni, ale jest mało prawdopodobne, aby udało mu się podać nominalistyczną wersję mechaniki kwantowej (gdzie mamy do czynienia z nieskończone wymiarowymi przestrzeniami)⁵⁷. Oczywiście niemożność przeprowadzenia programu Fielda dla bardziej skomplikowanych teorii fizycznych nie została udowodniona, ale wydaje się, że w tym przypadku ciężar dowodu spoczywa na Fieldzie, który nie uzyskał żadnych pozytywnych wyników w tym kierunku.

4) Oprócz wymienionych wyżej zarzutów można sformułować jeszcze kilka innych. Field posługuje się pojęciem przekładu teorii nominalistycznej na teorię matematyczną, nie precyzując jednak, o co mu dokładnie chodzi. Nie jest jasne, w jaki sposób zdania matematyczne miałyby być tłumaczone na zdania nominalistyczne. Czy każde zdanie matematyczne ma swój nominalistyczny odpowiednik, czy tylko niektóre? Jak je rozpoznać? Innym zagadnieniem jest kwestia niezupełności teorii znominalizowanych. Wszak pytania nie rozstrzygnięte można rozstrzygnąć w oparciu o silniejszą teorię (podobnie jak pewne twierdzenia dotyczące liczb naturalnych niedowodliwe w arytmetyce Peano są dowodliwe w teorii mnogości). Skąd jednak wiadomo, jakiej teorii wolno nam użyć? Field pisze jedynie, że „dobra matematyka jest nietwórcza; odkrycie, że akceptowana obecnie matematyka nie jest nietwórcza, byłoby odkryciem, że nie jest ona dobra”. Jest to założenie, którego Field nie uzasadnia⁵⁸.

5) Aby przeprowadzić swój program, Field posługuje się silną logiką. Sam zresztą otwarcie pisze o tym, że „zastosowanie wzmocnionej aparatury logicznej ratuje nas przed koniecznością uwierzenia w dużą ilość niczym nie uzasadnionych obiektów

⁵⁴ D. Malament, *Review of Science Without Numbers*, dz. cyt., s. 532.

⁵⁵ Liston, *Taking Mathematical Fictions Seriously*, dz. cyt.

⁵⁶ J.P. Burgess, *Why I Am Not a Nominalist*, „Notre Dame Journal of Formal Logic”, 24, 1983, s. 93-105.

⁵⁷ Urquhart w *The Logic of Physical Theory*, dz. cyt., s. 145-154, twierdzi wręcz, że jest wątpliwe, czy można podać nominalistyczną wersję teorii grawitacji dla czasoprzestrzeni o zmiennej krzywiznie. Możliwość taką dostrzega jednak Malament w: *Review of Science Without Numbers*, „Journal of Philosophy”, 79, 1982, s. 523-534.

⁵⁸ Omówienie tego typu problemów związanych z programem Fielda czytelnik znajdzie w artykule Wójtowicza, *Czy matematyka jest niezbędna w nauce?*, dz. cyt.

o zupełnie innym charakterze niż pozostałe obiekty, w które wierzymy”⁵⁹. W szczególności Field akceptuje obiekty nieskończone, nie stawia nawet żadnych ograniczeń co do ich mocy. Odrzuca jedynie obiekty abstrakcyjne. Jednak krytycy wskazują na fakt, że założenie o istnieniu obiektów nieskończonych jest z punktu widzenia logiki znacznie silniejsze niż założenie o istnieniu obiektów abstrakcyjnych⁶⁰. Wzmacnianie logiki zobowiązuje do wyjaśnienia, jakie założenia pozalogiczne musimy przyjąć i jak uzasadnić tego typu postępowanie.

5.2 Konstruktywizm Chihary. Chihara jest przeciwnikiem realizmu (który nazywa, chyba nieco lekceważąco, „literalizmem”⁶¹) i twierdzi, że zdania egzystencjalne matematyki wcale nie muszą nieść za sobą zobowiązań ontologicznych. Jego celem jest „rozwiniecie systemu matematycznego, w którym twierdzenia egzystencjalne tradycyjnej matematyki zostaną zastąpione stwierdzeniami dotyczącymi konstruowalności”⁶². Ma to być możliwe dzięki stworzeniu teorii konstruowalności, w której konstruowalność jest pojęciem pierwotnym. Logika, którą posługuje się w tym celu Chihara, to ω -sortowa logika predykatów z dodatkowym kwantyfikatorem konstruowalności, będąca konstruktywistycznym wariantem teorii typów. Twierdzenia egzystencjalne matematyki („istnieje taka liczba, że...”) zostają zastąpione twierdzeniami dotyczącymi konstruowalności („jest możliwe skonstruowanie takiej liczby, że...”). Należy tu dodać, że Chihara rozumie konstruowalność znacznie szerzej niż intuicjoniści. Stwierdzenie, że jakaś konstrukcja jest możliwa do przeprowadzenia, nie znaczy wcale, że wiemy, jak ta konstrukcja wygląda⁶³. Znaczy jedynie tyle, że „w logicznej przestrzeni zdań otwartych jest dostatecznie dużo miejsca, aby skonstruować dane zdanie otwarte”⁶⁴.

Na zarzuty dotyczące obrania tak złożonego systemu logicznego jako podstawowego dla rozwijania matematyki, Chihara odpowiada⁶⁵, iż postulat Quine’a, aby naukę formułować w logice elementarnej, nie jest zasadny, zaś teorie naukowe najlepiej formułować w pewnego rodzaju języku naturalnym⁶⁶. Temu celowi ma właśnie służyć tworzona przez Chiharę logika. Chihara następnie rekonstruuje fragmenty arytmetyki liczb naturalnych i arytmetyki liczb rzeczywistych.

W stosunku do teorii Chihary można wysunąć szereg zarzutów. Po pierwsze, podobnie jak teoria Fielda obejmuje ona zaledwie wąski fragment matematyki. Jeżeli zatem Chihara twierdzi, że jest to możliwe także w stosunku do reszty matematyki

⁵⁹ Field, *Science Without Numbers*, dz. cyt., s. 98

⁶⁰ Urquhart, *The Logic of Physical Theory*, dz. cyt.

⁶¹ C. Chihara, *Constructibility and mathematical existence*, Oxford 1990, s. 3.

⁶² Tamże, s. 25.

⁶³ Tamże, s. 48.

⁶⁴ Tamże, s. 48.

⁶⁵ Tamże, s. 87.

⁶⁶ Należy tu dodać, że Chihara nie ma zapewne na myśli jednego z języków etnicznych, ale „naturalny język naukowy”, powstały w trakcie uprawiania nauki, w którym wyrażenia z języka naturalnego występują razem z fachową terminologią i pojęciami matematycznymi.

(stosowanej), to powinien podać przeformułowania bardziej zaawansowanych fragmentów matematyki. *A priori* nie jest oczywiste, że to się musi udać.

Drugi rodzaj obiekcji jest taki sam, jak zarzuty wysuwane w stosunku do teorii Russella. Podobnie jak Russell, Chihara musi przyjąć pewne aksjomaty pozalogiczne (ekstensjonalności, abstrakcji i nieskończoności, który Chihara nazywa „hipotezą nieskończoności”). Chihara nie wyjaśnia, co upoważnia go do uznania tej wiedzy za czysto logiczną, dotyczącą konstruowalności zdań otwartych, nie zaś obiektów matematycznych.

Trzeci rodzaj zarzutów dotyczy używanych przez Chiharę pojęć modalnych. Zastąpienie zdań egzystencjalnych zdaniem modalnymi zmusza nas do wyjaśnienia problemów ontologicznych związanych z koncepcją możliwych światów. Zapewnienia Chihary, że semantyka typu Kripkego dla jego teorii jest jedynie pewnym chwytem heurystyczno-dydaktycznym⁶⁷, nie stanowią, jak sądzę, zadowalającego rozwiązania tego problemu. Według Chihary stwierdzenie, że możliwe jest skonstruowanie zdania otwartego, nie niesie żadnych zobowiązań ontologicznych dotyczących rzekomego obiektu, o którym mówi to zdanie, podobnie jak stwierdzenie, że można zbudować dom o pewnych parametrach, nie oznacza, że taki dom istnieje⁶⁸. Nie jest jednak oczywiste, że rozwiązanie problemów ontologicznych związanych z modalnością jest takie proste.

6. *Realizm*. Współcześni realiści czerpią podstawowe inspiracje przede wszystkim z koncepcji Gödla i z prac Quine'a i Putnama dotyczących zobowiązań ontologicznych. Jak już wspomnieliśmy, koncepcja Gödla umożliwia sformułowanie teorii epistemologicznej dla matematyki (nawet jeśli jest ona przedmiotem dyskusji i nie jest powszechnie akceptowana). Z kolei stanowisko Quine'a i Putnama umożliwia wytłumaczenie efektywności matematyki w opisie świata⁶⁹. Nie są to jednak jedyne stanowiska realistyczne; omówimy zatem najpierw ich „nieplatonistyczne” wersje.

6.1. „Platonizm fizykalistyczny”. Zalety platonizmu Gödla i quasi-empiryzmu Quine'a-Putnama próbuje łączyć Maddy w swojej teorii „platonizmu fizykalistycznego”⁷⁰. Jak już wskazuje sama nazwa tej teorii, nie jest to platonizm klasyczny. Pod

⁶⁷ Chihara, *Constructibility and mathematical existence*, dz. cyt., s. 25, 38.

⁶⁸ Tamże, s. 39.

⁶⁹ Przypomnijmy tu znany esej Wignera, w którym autor w jakimś sensie kapituluje przed problemem wyjaśnienia matematycznej opisywalności przyrody, pisząc iż „...cud adekwatności języka matematyki do formułowania praw przyrody jest wspaniałym darem, którego ani nie rozumiemy, ani na który nie zasługujemy” (E.P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics”, 13, 1960, s. 1-14). W myśl ujęcia Quine'a-Putnama matematyka dlatego się stosuje do opisu świata, że w tym celu (jako fragment teorii rzeczywistości) została stworzona. (Nie wyjaśnia to oczywiście powodów, dla których przyroda jest opisywalna w taki sposób, ale to stanowi odrębny problem).

⁷⁰ P. Maddy, *The Roots of Contemporary Platonism*, „Journal of Symbolic Logic”, 54, 1989, s. 1121-1144; *Realism in mathematics*, New York 1990; *Physicalistic Platonism*, w: *Physicalism in Mathematics*, dz. cyt., s. 259-289.

pojęciem platonizmu rozumie się bowiem stanowisko ontologiczne zakładające istnienie pozaczasoprzestrzennych, nieoddziaływujących kauzalnie, abstrakcyjnych obiektów. Niemniej jednak stanowisko Maddy można zaliczyć do realistycznych. Według Maddy zbiory istnieją; nie są jednak abstrakcyjne, lecz lokalizowalne czasoprzestrzenie, a także oddziałują „poprzez swoje własności”. Maddy podaje przykład automatu, do którego trzeba wrzucić trzy określone monety, aby otrzymać napój. Według Maddy, to zbiór monet oddziałuje kauzalnie na automat poprzez fakt, że jest trzelementowy, czyli poprzez „posiadanie własności trzeelementowości”. Postępując zgodnie z postulatami epistemologii naturalistycznej, Maddy dla wyjaśnienia, w jaki sposób poznajemy przedmioty matematyczne, unika jakichkolwiek odwołań do pozazmysłowych form percepcji. Zbiory przedmiotów fizycznych postrzegamy dzięki temu, że postrzegamy przedmioty, z których składają się te zbiory. Zbiory są więc ulokowane w czasoprzestrzeni tam, gdzie są elementy ich domknięcia przechodniego⁷¹. W ten sposób mamy dostęp poznawczy do „prostych” zbiorów (są nimi zbiory dziedzicznie skończone)⁷². Z kolei zbiory bardziej skomplikowane poznajemy poprzez rozważania metateoretyczne, analizując ich rolę w teorii naukowej.

Bardziej złożone obiekty teoriomnogościowe (np. duże liczby kardynalne)⁷³ traktowane byłyby zatem jak obiekty teoretyczne w fizyce. Epistemologia Maddy jest więc „dwustopniowa”. Pierwszy stopień polega na poznaniu lokalizowalnych czasoprzestrzennie zbiorów dziedzicznie skończonych; drugi zaś na badaniu zbiorów nieskończonych, które odgrywają w matematyce rolę podobną do roli obiektów teoretycznych w fizyce.

Nie wnikając w szczegóły zauważmy, że stanowisko Maddy wika się w problemy, których rozwiązanie nie jest oczywiste. Z określenia lokalizacji zbioru wynika bowiem, że w tym samym miejscu (obszarze) czasoprzestrzeni znajduje się jednocześnie olbrzymia ilość różnych obiektów. W miejscu jabłka znajduje się także {jabłko}, {jabłko, {jabłko}}, {{{jabłko}}}, *etc.* Maddy proponuje dwa wyjaśnienia tego niepokojącego zjawiska: albo twierdzić, że pomiędzy jabłkiem a {jabłkiem} istnieje pewna nieuchwytna empirycznie różnica, albo utożsamiać obiekty fizyczne z ich singletonami (tzn. utożsamiać jabłko z {jabłkiem})⁷⁴. Pierwsze rozwiązanie jest, jak się wydaje,

⁷¹ Domknięcie przechodnie dowolnego zbioru X ($\text{trcl}(X)$) definiuje się w sposób następujący: Definiujemy indukcyjnie $X^1 := \cup X$, $X^{n+1} := \cup X^n$. Domknięcie przechodnie $\text{trcl}(X) := \cup \{X^n : n \in \mathbb{N}\}$. Nieformalnie, domknięcie przechodnie zbioru X składa się z wszystkich elementów zbioru X , elementów elementów zbioru X , elementów ...elementów zbioru X , *etc.*

⁷² Zbiory dziedzicznie skończone to takie, których domknięcie przechodnie jest skończone.

⁷³ Duże liczby kardynalne to, mówiąc nieformalnie, zbiory tak duże, że ich istnienia nie da się udowodnić w teorii mnogości. Ich istnienie jest niezależne od ZFC, zaś dołączenie założeń o istnieniu pewnych dużych liczb kardynalnych pozwala rozwiązać niektóre z otwartych problemów.

⁷⁴ Przez singleton x rozumie się jednoelementowy zbiór, którego jedynym elementem jest x . Nie jest jasne, co dokładnie znaczy i na czym miałyby polegać utożsamienie obiektu fizycznego z jego singletonem. Nasuwa się tu (być może naiwny) zarzut, że jeśli są to dwa różne przedmioty, to nie ma powodu, aby je utożsamiać, podobnie jak nie możemy utożsamiać dwóch różnych osób.

całkowicie niezgodne z doktryną fizykalizmu i naturalizmu, do których Maddy się przyznaje. Drugie pozwala utrzymać monistyczną teorię rzeczywistości, w myśl której świat jest fizyko-matematyczny: każdy obiekt matematyczny ma „źródło istnienia” w obiektach fizycznych, zaś każdy obiekt fizyczny jest jednocześnie obiektem matematycznym. W myśl teorii Maddy zbiory poruszają się, przemieszczają, zmieniają kształt. Pojawia się szereg problemów. Jakie są kryteria identyczności zbiorów? Bo przecież nie lokalizacja czasoprzestrzenna, gdyż w tym samym miejscu może być wiele zbiorów. Czy - posługując się przykładem Maddy - kiedy zaglądam do lodówki, widzę rzeczywiście pięcioelementowy zbiór jajek, czy może pięć jednoelementowych zbiorów jajek, a może oba zbiory naraz? Wszak wszystkie zlokalizowane są w pojemniku z jajkami w mojej lodówce. Skąd wiem, który z nich widzę w tym momencie? Czy jest to tylko i wyłącznie kwestia mojej intencji?

6.2. *Strukturalizm*. Próbę skonstruowania teorii wiedzy matematycznej umożliwiającą przyjęcie stanowiska platonizmu ontologicznego podejmuje również Resnik w *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology* i *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*⁷⁵. Podejmując obok „epistemologicznego wyzwania Benacerrafa” (jak niekiedy bywa nazywany sformułowany przez Benacerrafa problem dostępu poznawczego do przedmiotów matematycznych) również jego „wyzwanie ontologiczne”⁷⁶, Resnik rozwija strukturalistyczną koncepcję matematyki. W przeciwieństwie do Maddy, Resnik jest bliski klasycznemu platonizmowi: przyjmuje ontologiczną tezę platonizmu, mówiącą o tym, że przedmioty matematyczne są abstrakcyjne, nie oddziałują kauzalnie i są niezależne od naszego umysłu. Prawdy matematyczne dotyczą przedmiotu matematyki, a niektóre z tych prawd możemy poznać. Jednak przedmiotem matematyki nie są obiekty, ale raczej struktury (wzorce). Resnik wychodzi od obserwacji, że nie możemy mówić o nierelacyjnych cechach przedmiotów matematycznych. (Podobny pogląd na kwestię wiedzy matematycznej wyraża Steiner. Według niego wiedza na temat obiektów matematycznych może dotyczyć wyłącznie relacji, w jakie wchodzą one z innymi

⁷⁵M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology*, „Nous”, 15, 1981, s. 529-550; tenże, *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*, „Nous”, 16, 1982, s. 95-105

⁷⁶Chodzi tu o sformułowany przez Benacerrafa w *What Numbers Could Not Be* („Philosophical Review”, 74, 1965, s. 47-73) problem wieloredukcji. Jeżeli bowiem utrzymujemy, że liczby są zbiorami pewnego rodzaju, to pojawia się problem, którymi konkretnie są one zbiorami. Można bowiem konstruować liczby naturalne, wychodząc od zbioru pustego poprzez operacje następnika na co najmniej dwa sposoby:

1. jako $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ etc.
2. jako $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ etc.

Jeżeli zatem chcemy utrzymywać, że liczby naturalne są którymś z tych dwóch ciągów, to powinniśmy podać przekonujący argument na rzecz tej tezy, co według Benacerrafa jest niemożliwe. Dalej od Benacerrafa idzie M. Jubien w *Ontology and Mathematical Truth* („Nous”, 11, 1977, s. 133-150) twierdząc, że gdyby nawet obiekty matematyczne istniały, to i tak nie byłoby możliwe odniesienie do nich, ze względu na brak jednoznaczności wynikający z możliwości reprezentowania liczb jako zbiorów na wiele sposobów.

objektami⁷⁷). Liczba 13 nie ma własności immanentnych, niezależnych od istnienia innych liczb. Jej własności wynikają z miejsca w pewnej strukturze, a mianowicie w strukturze liczb naturalnych. Takie ujęcie pozwala uniknąć konieczności udzielenia odpowiedzi na problem wieloredukcji Benacerrafa⁷⁸. Praktyka matematyczna zdaje się też potwierdzać tę obserwację: często utożsamia się struktury izomorficzne, w powszechnym użyciu jest zwrot „z dokładnością do izomorfizmu”⁷⁹.

Opierając się na założeniu dotyczącym „matematyki jako nauki o wzorcach” (*Mathematics as A Science of Patterns* to tytuł jednego z artykułów Resnika), Resnik formułuje hipotezy dotyczące tworzenia się wiedzy matematycznej. Nie postuluje istnienia jakiejś szczególnie zdolności, intuicji umożliwiającej poznanie prawd matematyki. Jego zdaniem pierwsze stadium tworzenia się wiedzy matematycznej opiera się na „doświadczeniu, że coś ma pewien wzorec” (*experiencing something as patterned*). W ten sposób tworzą się najprostsze przekonania dotyczące kształtów czy małych liczb naturalnych. Następnie stopniowo poznajemy struktury abstrakcyjne o coraz większym stopniu komplikacji.

W kwestii przedmiotu matematyki podobne do Resnika stanowisko zajmuje Shapiro w *Mathematics and Reality*⁸⁰. Wychodzi z założenia, że pomiędzy przedmiotem matematyki a przedmiotem nauk przyrodniczych istnieje ścisły i nieprzypadkowy związek. Wyjaśnienie natury tego związku jest jednym z najważniejszych problemów filozofii matematyki. Według Shapiro nie rozwiązują go tradycyjne stanowiska, takie jak formalizm, logicyzm, platonizm i intuicjonizm. Shapiro formułuje zatem podstawowe tezy koncepcji strukturalistycznej. W myśl tej koncepcji matematyka posiada przedmiot badań (jest to zatem stanowisko realistyczne), ale przedmiotem badań matematyki nie są obiekty *per se*, ale struktury. Na przykład arytmetyka bada nie liczby jako takie, ale pewną strukturę liczbową⁸¹. Obiekty

⁷⁷ M. Steiner, *Platonism and the Causal Theory of Knowledge*, Ithaca, NY 1975.

⁷⁸ Podobne obserwacje można znaleźć u Jubiena w jego *Ontology and Mathematical Truth*, dz. cyt.

⁷⁹ Zwrot ten oznacza, że ignorujemy różnice pomiędzy izomorficznymi obiektami. Przykładem kontekstu, w którym taki zwrot jest przez matematyków używany, są często twierdzenia o jednoznaczności. np: „z dokładnością do izomorfizmu istnieje dokładnie jedno domknięcie algebraiczne ciała K ”, co oznacza po prostu tyle, że każde dwa domknięcia algebraiczne są izomorficzne, a więc z naszego punktu widzenia jednakowe i można je utożsamiać.

⁸⁰ S. Shapiro, *Mathematics and Reality*, „Philosophy of Science”, 50, 1983, s. 523-548.

⁸¹ Takie podejście nie jest nowe, można je znaleźć już w pismach Dedekinda („Was sind und was sollen die Zahlen”). Badał on „proste systemy nieskończone”, scharakteryzowane przez cztery aksjomaty (istnienie i jedyność zera, istnienie i jednoznaczność następnika, aksjomat mówiący, że różne liczby mają różne następniki i aksjomat indukcji drugiego rzędu). Przy badaniach „prostych systemów nieskończonych” Dedekind abstrahował od własności obiektów, które składały się na te systemy, postrzegając je jako miejsca w pewnej strukturze. Dedekind udowodnił twierdzenie o izomorfizmie „prostych systemów nieskończonych” (w dzisiejszej terminologii: twierdzenie o kategoryczności aksjomatyki Peano drugiego rzędu).

matematyczne są tak naprawdę jedynie „miejscami w strukturze”: liczby to miejsca w strukturze liczbowej, zbiory to miejsca w strukturze teoriomnogościowej. Stosowalność matematyki Shapiro tłumaczy faktem egzemplifikacji struktur w świecie; podaje tu przykład teorii węzłów jako teorii czysto matematycznej, która jednak posiada egzemplifikacje w świecie fizycznym (w postaci rzeczywistych węzłów na rzeczywistym sznurku). Struktury pełnią zatem rolę uniwersaliów, zaś matematyka ma się do rzeczywistości tak, jak uniwersalia do partykulariów. Stanowisko strukturalistyczne wyjaśnia w ten sposób fenomen stosowalności matematyki. Na tym jednak nie kończą się jego zalety. Umożliwia ono wyjaśnienie związków pomiędzy działami matematyki - polegają one na „modelowaniu pewnych struktur w innych”, na przykład na modelowaniu struktury liczbowej w strukturze teoriomnogościowej, co umożliwia uzyskanie nowej wiedzy o strukturze liczbowej (w postaci prawdziwych zdań o liczbach naturalnych niedowodliwych w PA, a dowodliwych w ZFC). Ujęcie to pozwala w szczególności wyjaśnić związek pomiędzy matematyką stosowaną a matematyką czystą, nie czyniąc jednocześnie sztucznych założeń rozgraniczających te dziedziny. Dzięki temu nie mamy tu do czynienia ze słabością, jaką wykazuje stanowisko Quine’a-Putnama, w myśl którego jedynie stosowane fragmenty matematyki mają jasny status ontologiczny.

Shapiro wskazuje, że strukturalizm umożliwia zatem holistyczne spojrzenie na matematykę i naukę, a także na samą matematykę. Należy jednak dodać, że nie formułuje własnej teorii epistemologicznej, powołując się jedynie na prace Maddy i Resnika.

Stanowisko strukturalistyczne inspirowane jest (jak się wydaje) kategoriowym spojrzeniem na matematykę, charakterystycznym dla programu Bourbakistów. W pewnym okresie teoria kategorii zyskała dużą popularność (zwłaszcza w takich działach matematyki jak topologia algebraiczna czy algebra homologiczna). Wyrażano nawet opinie, że stanie się podstawową dla matematyki teorią, zastępując teorię mnogości. Te związane z teorią kategorii nadzieje okazały się jednak płonne.

Wydaje się, że nacisk na strukturalne aspekty obiektów matematycznych jest właściwy tylko w niektórych działach matematyki. W teorii grup, pierścieni, modułów, *etc.* badamy „abstrakcyjne” struktury — znane z „codziennej” praktyki matematycznej grupy (np. grupy macierzy) pojawiają się tam jedynie jako przykłady. Podejście takie umożliwia sformułowanie ogólnych, abstrakcyjnych twierdzeń o szerokim zasięgu. Jednak nie cała matematyka zajmuje się tak ogólnymi badaniami. W wielu jej dziedzinach mamy do czynienia z „modelami zamierzonymi”: są nimi liczby naturalne, różnice różniczkowe, konkretne przestrzenie funkcyjne *etc.* Wydaje się, że w przypadku tego typu obiektów trudno jest w uzasadniony sposób sformułować stanowisko strukturalistyczne. Jeśli badamy np. torus zanurzony w R^3 , to badamy bardzo konkretny obiekt geometryczny, „ten” torus. Ważne są dla nas jego cechy, zarówno „zewnątrzne” (np. położenie w przestrzeni), jak i czysto wewnętrzne, jako różnice topologicznej albo różniczkowej. Czy rzeczywiście ten torus nie ma własności nierelacyjnych? Czy fakt, że jest różniczkowo orien-

towałną, mówi nam jedynie o relacji tego torusa do innych rozmaitości czy obiektów matematycznych? Możemy, owszem, patrzeć na torus jako na element kategorii przestrzeni topologicznych i interesować nas będą jedynie jego relacje z innymi obiektami tej kategorii (tj. morfizmy). Jednak wydaje się, że nie uwolnimy się nigdy od „tego” torusa — taka jest po prostu praktyka matematyczna.

Inny przykład: badamy przestrzeń $L^2[0,1]$. Jest to konkretna przestrzeń funkcyjna stosowana w fizyce. W jakim sensie nie ma ona wewnętrznych własności? W jakim sensie jej np. ośrodkowość jako przestrzeni topologicznej albo zupełność jako przestrzeni metrycznej są jedynie cechami relacyjnymi? Być może interpretacja taka jest możliwa, jednak jak na razie strukturaliści rzucili się na łatwy łup w postaci liczb naturalnych, ignorując bardziej złożone, a niewątpliwie obecne w matematyce obiekty.

Ostatni przykład dotyczy zbioru pustego. Czy nie ma cech immanentnych? Czy fakt, że nie należą do niego żadne elementy, jest jedynie cechą relacyjną? Odpowiedź jest pozornie oczywista: pustość jest jedynie cechą relacyjną, bo definiowana jest jako niezachodzenie relacji należenia pomiędzy dowolnym zbiorem a zbiorem pustym. W każdym modelu dla teorii mnogości rolę zbioru pustego odgrywa właśnie taki zbiór. Jednak pojęcie zbioru pustego jest pojęciem absolutnym (zbiór pusty jest taki sam we wszystkich modelach). Co więcej, wydaje mi się, że intuicje, jakie wiążemy ze zbiorem pustym, raczej sugerują jego „metafizyczną absolutność” — zbiór pusty jest jeden (o ile oczywiście wierzymy w zbiory), zaś pustość jest jego cechą wewnętrzną. Gdyby nie było innych zbiorów, to zbiór pusty nie przestałby być zbiorem pustym. (Nie zachodzi tu prosta analogia między zbiorem pustym a liczbą 5, która jest tą liczbą tylko dlatego, że istnieje jakaś struktura liczbowa, w której liczba 5 odgrywa pewną rolę.) Jeśli jednak zgodzimy się na absolutność zbioru pustego, to stąd już tylko krok do uznania absolutności zbiorów dziedzicznie skończonych. Być może zatem zasadne byłoby przyjęcie jakiejś okrojonej wersji strukturalizmu, w której niektóre obiekty (np. elementy pewnych grup) miałyby jedynie cechy relacyjne, ale niektóre obiekty miałyby również cechy absolutne, wewnętrzne.

6.3. Platonizm tradycyjny. Referowane powyżej stanowiska realistyczne nie są, jak widzimy, tożsame z klasycznym platonizmem. Do lepszego przedstawienia różnic przydatna będzie charakterystyka tego ostatniego podana przez Irvine’a:

„i) obiekty matematyczne istnieją w sposób niezależny od ludzkiej myśli i od naszej zdolności uzyskania wiedzy na ich temat;

ii) są nie-fizyczne, istnieją poza czasem i przestrzenią;

iii) zdania matematyczne posiadają wartość logiczną, niezależnie od naszej działalności umysłowej i naszej zdolności do uzyskania wiedzy na ich temat;

iv) zdania te posiadają wartości logiczne na mocy własności obiektów matematycznych (a nie jako wynik np. własności języka formalnego);

v) jest możliwe jednoznaczne wskazanie desygnatów obiektów matematycznych⁸²;

vi) i uzyskanie wiedzy o nich.⁸³

Nieco inną charakterystykę klasycznego stanowiska platonistycznego podaje Brown, zdeklarowany platonik:

„i) obiekty matematyczne istnieją w sposób niezależny od nas, podobnie jak obiekty fizyczne [...];

ii) obiekty matematyczne są abstrakcyjne, istnieją poza czasem i przestrzenią. To odróżnia platonizm od innych form matematycznego realizmu [...];

iii) zdobywamy wiedzę o nich dzięki zdolności naszego umysłu, aby je (a przynajmniej niektóre z nich) w jakiś sposób „uchwycić”. [...] Nie musimy jednak postrzegać bezpośrednio wszystkich obiektów, o których posiadamy wiedzę; wiedzę o niektórych z nich możemy zdobywać przez stawianie hipotez, tak, jak o obiektach teoretycznych w fizyce. [...] Niektóre obiekty i niektóre aksjomaty poznajemy przez hipotezy, a nie przez bezpośrednią intuicję.

iv) Pomimo iż wiedza matematyczna jest *a priori* (tzn. jest niezależna od poznania zmysłowego), proces zdobywania wiedzy matematycznej nie jest bezbłędny. To nie podważa też platonizmu. Nie negujemy istnienia filizanek, pomimo iż niektóre nasze przekonania dotyczące tych filizanek mogą być błędne⁸⁴”.

Tezy i) i ii) dotyczą platonizmu ontologicznego (w przywoływanej już terminologii Steinera), teza iii) i iv) — platonizmu epistemologicznego. Jak już wspomnieliśmy wyżej, teza iii) jest przedmiotem krytyki ze strony zwolenników kauzalnej teorii wiedzy i epistemologii naturalistycznej. Teza iv) zawiera obronę platonizmu przed zarzutami dotyczącymi paradoksów czy błędów w rozumowaniach matematycznych. Brown opowiada się tu zatem przeciwko utożamianiu wiedzy apriorycznej z wiedzą pewną.⁸⁵

⁸² Przypomnijmy tu problem wieloredukcji Benacerrafa i tezę Jubiena, iż nawet gdyby obiekty matematyczne istniały, to i tak nie byłoby możliwe ich wskazanie jako desygnatów terminów matematycznych. Argumenty te niektórzy realiści próbują niejako odwrócić. Jeśli bowiem potrafimy (a potrafimy!) wskazać „prawdziwe liczby naturalne”, pomimo niemożności kategoriycznej ich charakteryzacji w teorii pierwszego rzędu, to aby ten fakt wyjaśnić, musimy powołać się na pozateoretyczne, czyli platonistyczne rozważania (por. A.D. Irvine, *Nominalism, Realism & Physicalism in Mathematics: An Introduction to the Issues*, w: *Physicalism in Mathematics*, dz. cyt., s. ix-xxvi).

⁸³ Tamże, s. xix-xx.

⁸⁴ Brown, *π in the Sky*, dz. cyt.

⁸⁵ Podobną opinię znajdziemy u Gödla, który twierdzi, że „paradoksy teoriomnogościowe nie stanowią większego problemu dla matematyki niż złudzenia zmysłowe dla fizyki. Jest możliwe, że nowe intuicje matematyczne doprowadzą nas do rozwiązywania problemów takich jak hipoteza *continuum* Cantora” (Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?* dz. cyt., s. 64). Przypomnijmy, że Gödel do końca życia poszukiwał (bezsukcesyjnie) aksjomatów mających umożliwić rozwiązanie tego zagadnienia, por. K. Gödel, *A Proof of Cantor's Continuum Hypothesis From a Highly Plausible Axiom About Orders of Growth*, w: *Collected Works III*, Fereman S. (red.), New York 1995, s. 422-423.

Stanowisko realistyczne ma według Browna szereg zalet. Po pierwsze umożliwia dobre zrozumienie pojęcia prawdy matematycznej. Zdania matematyczne są prawdziwe lub fałszywe w taki sam sposób jak zdania dotyczące świata fizycznego. Po drugie wyjaśnia fakt posiadania przez nas intuicji dotyczących prawd matematycznych, czego nie są w stanie wyjaśnić teorie fikcjonalistyczne⁸⁶. Po trzecie, stanowisko platonistyczne pozwala nam na przyjęcie podobnych (tj. realistycznych) stanowisk w stosunku do nauki i matematyki.

Brown stwierdza, że argument z niezbędności nie jest tak naprawdę podstawowym argumentem na rzecz platonizmu. Dlatego nie komentuje teorii Fielda. Jeśli bowiem nawet argumentacja Fielda jest skuteczna, to jest taka jedynie w stosunku do jednego z argumentów, nie podważając innych. Zdecydowanie odrzuca także krytykę teorii intuicji Gödla obecną w pracach Chihary. Według niego źródłem tego typu zarzutów są: fizykalizm i naturalizm⁸⁷, których nie akceptuje.

Brown dochodzi do konkluzji, że mimo iż nie jest w stanie podać zadowalającej teorii intuicji matematycznej (rzeczywiście, argumenty Browna to nie tyle argumenty pozytywne na rzecz platonizmu, co argumenty negatywne przeciwko przeciwnikom platonizmu), to ataki na platonizm ze strony nominalistów są jak na razie bezskuteczne. Zatem nawet jeśli ktoś „nie odczuwa sympatii” dla stanowiska platonistycznego, to musi przyznać, że słabości innych koncepcji są znacznie poważniejsze.

6.4. *Propozycja epistemologiczna Balaguera*. Próbę rozwiązania epistemologicznych problemów platonizmu podejmuje Balaguer⁸⁸. Przyjmuje „pełną wersję platonizmu” (*full-blooded platonism*), który opiera się na założeniu, że istnieją *wszystkie możliwe logicznie* przedmioty matematyczne (nie rozstrzyga tu sporu pomiędzy tradycyjnym „platonizmem obiektywnym”⁸⁹ a strukturalizmem), a więc, że każda niesprzeczna teoria matematyczna opisuje pewien fragment świata matematycznego. Inaczej niż pozostali platonicy, odrzucający przesłanki rozumowania Benacerrafa (poprzez krytykę kauzalnej teorii wiedzy), Balaguer stara się sprostować „epistemologicznemu wyzwaniu Benacerrafa” wykazując, że jego wersja platonizmu pozwala wyjaśnić, w jaki sposób możemy poznawać część prawd matematyki. Skoro bowiem istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne logicznie niesprzeczne, to wystarczy „pomyśleć o którymkolwiek” (tzn. sformułować dowolną teorię), aby mieć pewność, że nasza (niesprzeczna) teoria (czyli nasza wiedza) odnosi się do jakiegoś istniejącego przedmiotu badań.

⁸⁶ Brown poddaje krytyce również stanowisko Quine’a, który wprawdzie przyjmuje stanowisko realistyczne, ale neguje możliwość poznania obiektów matematycznych. Brown wskazuje na to, że teoria Quine’a nie wyjaśnia, dlaczego zdanie „ $2 < 3$ ” wydaje się nam oczywiste, podczas gdy zdanie „protony są cięższe niż elektrony” wcale nie.

⁸⁷ Brown, *It in the Sky*, dz. cyt., s. 100.

⁸⁸ M. Balaguer, *A Platonist Epistemology*, „Synthese”, 103, 1995, s. 303-325.

⁸⁹ W literaturze używa się powszechnie terminu „object-platonizm”, który określa stanowisko tradycyjnego platonizmu, w którym zakładamy istnienie obiektów matematycznych, w odróżnieniu od strukturalizmu czy innych realistycznych stanowisk.

Koncepcja Balaguera nie jest jeszcze dopracowana i w swojej obecnej postaci nasuwa szereg wątpliwości:

1. „Pełny platonizm” w takim samym stopniu jak formalizm nie jest w stanie wyjaśnić faktu stosowalności matematyki. Jeżeli bowiem istnieją wszystkie możliwe obiekty, to dlaczego tylko niektóre przydatne są w opisie rzeczywistości? Jeśli uznamy to za przypadek, to równie dobre wyjaśnienie stosowalności matematyki podają instrumentalisci, traktujący matematykę jako użyteczną fikcję, jedną z wielu możliwych, ale różniącą się od pozostałych faktem swojej użyteczności. Być może jedynym wytłumaczeniem tego faktu jest „hipoteza ślepego krawca”, który szyje dowolne „twory ubraniowe”, a potem część z nich przez czysty przypadek okazuje się odpowiednia dla klientów. Wydaje się jednak, że platonik powinien zaproponować inne rozwiązanie tego problemu.

2. Druga wątpliwość dotyczy samego pojęcia „możliwości logicznej”, która w ujęciu Balaguera opiera się na pojęciu niesprzeczności. Nie jest jednak jasne, na jakiego typu niesprzeczność należy się tu powołać. Niesprzeczność jest pojęciem zrelatywizowanym do danego systemu dowodzenia. Może się zatem zdarzyć, że będziemy mieć do czynienia z niesprzeczną teorią bez modelu (oczywiście sformułowaną w logice, w której nie zachodzi twierdzenie o pełności).

3. Z „maksymalizmem ontologicznym” idzie w parze swoisty minimalizm epistemologiczny. Skoro bowiem istnieje wszystko, co istnieć może, to pytanie o to, jaki jest tak naprawdę świat zbiorów (np. czy tak naprawdę w świecie zbiorów prawdziwa jest hipoteza *continuum*, która dla Gödla była hipotezą dotyczącą rzeczywistości), w ujęciu Balaguera staje się bezprzedmiotowe. Istnieją bowiem wszelkie możliwe modele dla wszelkich możliwych niesprzecznych teorii, nie można jednak stwierdzić, że wszystkie są jedynie fragmentem pewnego większego „absolutnego” uniwersum, gdyż wszelkie tego typu uniwersa są równoprawne. Balaguer kapituluje przed problemem wyjaśnienia, jak wygląda uniwersum teoriomnogościowe⁹⁰. Stanowisko to diametralnie odbiega od postawy innych platoników. Przypomnijmy, że np. Gödel mówił o absolutnych prawdach matematyki, będących przedmiotem badań „matematyki właściwej”⁹¹. Scott pisze o poszukiwaniu absolutnego, czyli scharakteryzowanego w sposób kategori czny uniwersum zbiorów, zaś istnienie wielu modeli dla ZFC tłumaczy słabością mocy wyrażeniowej języków pierwszego rzędu⁹². Podobnie wielu matematyków poszukuje „najbardziej rozsądnych aksjomatów” umożliwiających rozwiązanie problemów teo-

⁹⁰ Balaguer stwierdza, że istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne, w szczególności uniwersum teoriomnogościowe zawiera wszystkie możliwe zbiory. Na pytanie „Jakie zbiory zawiera uniwersum teoriomnogościowe?” Balaguer odpowiada „wszystkie możliwe”. Nie jest to jednak dobra odpowiedź, dopóki nie doprecyzuje się pojęcia „wszystkich możliwych zbiorów”. Sformułowanie Balaguera nie pozwala uniknąć dyskusji, jaka toczy się wokół problemu np. operacji zbioru potęgowego.

⁹¹ Por. K. Gödel, *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications* w: *Collected Works III*, dz. cyt., s. 304-323.

⁹² D. Scott, *Wstęp do J.L. Bell: Boolean-valued Models and independence proofs in set theory*, Oxford 1977.

riomnogościowych (por. np. Dales, Woodin, *An Introduction to Independence for Analyst*⁹³, gdzie mowa jest o poszukiwaniu rozwiązania zagadnienia *continuum*, czy Melles, *Natural Internal Forcing Schemata Extending ZFC: Truth in the Universe?*⁹⁴, gdzie autor podaje propozycje aksjomatów dotyczących sposobu konstruowania metodą forcingu modeli dla teorii mnogości. Teoria Balaguera wydaje się eliminować potrzebę prowadzenia tego typu badań. Nie wyjaśnia też, dlaczego pewne „aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe”⁹⁵ zaś inne nie, skoro wszystkie opisują pewne fragmenty rzeczywistości. Oczywiście przed tym zarzutem można bronić się wskazując na fakt, że i w odniesieniu do świata fizycznego tylko niektóre zdania są oczywiste, zaś do innych dochodzimy dopiero po żmudnych i nieoczywistych badaniach i rozumowaniach.

7. *Spory wewnętrznie realistyczne*. Należy dodać, że także wśród zwolenników stanowiska realistycznego nie ma pełnej jednomyślności co do tego, jak wygląda uniwersum teoriomnogościowe, czyli co do tego, jakie zbiory istnieją, jakie aksjomaty je opisują i w jakim języku powinny być sformułowane. Znana jest dyskusja na temat tego, czy należy wybrać logikę pierwszego, czy drugiego rzędu dla zaksjomatyzowania teorii mnogości. Zwolennikami logiki pierwszego rzędu byli Gödel i Skolem, zwolennikiem logiki drugiego rzędu Zermelo. Dyskusja ta nie jest zamknięta, pomimo faktu, że powszechnie zaakceptowano aksjomatykę pierwszego rzędu⁹⁶. Podobnie pewnik wyboru wciąż prowokuje do dyskusji. W latach 60-tych podano przykład tzw. aksjomatu determinacji, sprzecznego z pewnikiem wyboru, ale posiadającego szereg „przyjemnych” własności. Również dyskusja na temat przyjęcia aksjomatów rozszerzających teorię mnogości ZFC (chodzi tu o tzw. aksjomaty dużych liczb kardynalnych czy aksjomaty odnoszące się do *forcingu*, metody konstruowania modeli dla ZFC) nie jest zamknięta⁹⁷. Analiza heurystycznych argumentów na rzecz przyjęcia takich a nie innych

⁹³ H.G. Dales, W.H. Woodin, *An Introduction to Independence for Analyst*, Cambridge 1987, s. 90-91.

⁹⁴ G. Melles, *Natural Internal Forcing Schemata Extending ZFC: Truth in the Universe?*, „Journal of Symbolic Logic”, 59, 1994, s. 461-472.

⁹⁵ Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, w: *Philosophy of Mathematics*, dz. cyt., s. 258-273.

⁹⁶ Drake twierdzi, że w gruncie rzeczy matematyka i logika drugiego rzędu są tym samym, zaś poznajemy je poprzez badanie ich przybliżeń w językach pierwszego rzędu (F.R. Drake, *On the Foundations of Mathematics in 1987*, w: „Logic Colloquium” '87, H-D. Ebbinghaus (red.), Amsterdam 1989). Barwise twierdzi, że w świetle osiągnięć tzw. „abstrakcyjnej teorii modeli” teza, iż właściwą dla opisu rozumowań matematycznych logiką jest logika pierwszego rzędu, jest nie do utrzymania (J. Barwise, *Model-theoretic Logics: Background and Aims*, w: *Model-theoretic logics*, J. Barwise, S. Feferman (red.), Berlin 1985, s. 3-23). Dyskusję podejmuje także Shapiro (*Second-order Languages and Mathematical Practice*, „Journal of Symbolic Logic”, 50, 1985, s. 714-742; *Foundations without foundationalism*, Oxford 1991) opowiadając się zdecydowanie za uznaniem logiki drugiego rzędu jako najbardziej adekwatnej do formalizowania rozumowań matematycznych.

⁹⁷ Por. np. K. Kanamori, M. Magidor, *The Evolution of Large Cardinal Axioms in Set Theory* (w: *Higher set theory*, G.H. Mtller and D.S. Scott (red.), *Lecture Notes in Mathematics* 669, Berlin 1978, s. 99-275), gdzie autorzy piszą o „teologiczno-estetycznym” aspekcie badań nad dużymi

aksjomatów jest przedmiotem zainteresowania zarówno matematyków, jak i filozofów⁹⁸. Widać zatem, że nawet wśród platoników, przyjmujących istnienie obiektów matematycznych nie musi istnieć zgoda co do tego, jak konkretnie wygląda świat obiektów matematycznych.

8. *Podsumowanie*. Dyskusja na temat istnienia przedmiotów matematycznych nie jest (jak można się było spodziewać) konkluzyjna. Brak jest na razie przekonujących argumentów pozytywnych na rzecz którejkolwiek z możliwych opcji. Nominaliści powołują się na kauzalną teorię wiedzy, aby obalić propłatonistyczny argument „z intuicji”. Z kolei zwolennicy stanowiska realistycznego wskazują na słabości tej koncepcji, powołując się bądź na brak spójności tej teorii (jak Steiner), kwestionując jej założenia (jak Liston) czy wskazując wręcz konkretne sytuacje, gdzie teoria ta nie może być zastosowana (Brown). Prorealistycznemu argumentowi „z niezbędności” fikcjonalisci przeciwstawiają nominalistyczny program Fielda, który jednak, jak się wydaje, nigdy nie doczeka się realizacji. Podobnie konstruktywizm Chihary wikła się w problemy, których rozwiązanie nie jest oczywiste, a w każdym razie trudno utrzymywać, że są one łatwiejsze do rozwiązania niż problemy związane z platonizmem.

Zwolennicy strukturalizmu, wychodząc od obserwacji dotyczących praktyki matematycznej, formułują teorie epistemologiczne. Klasyczni platonicy także próbują podać teorię wiedzy matematycznej. Oczywiście nie należy oczekiwać, że ich propozycje spotkają się z akceptacją ze strony np. zwolenników epistemologii naturalistycznej, zwłaszcza tak pewnych swoich racji jak Hart.⁹⁹

Niezależnie jednak od braku konkluzyjnych wyników (co w filozofii jest przecież dość powszechne), wydaje się, że można sformułować tezę, że nie ma przekonujących argumentów przeciwko stanowisku realistycznemu. Jednocześnie matematyka dostarcza wielu ciekawych problemów filozoficznych, zaś dyskusja nad nimi łączy się w naturalny sposób z ogólniejszymi dyskusjami z zakresu filozofii nauki, ontologii i epistemologii. Biorąc pod uwagę bogactwo literatury dotyczącej filozofii matematyki ukazującej się w ostatnich latach (której w niniejszym artykule zaprezentowana została jedynie część), wydaje się, że filozofia matematyki ma przed sobą okres ciekawych i (oby) owocnych badań.

liczbami kardynalnymi czy Melles (*Natural Internal Forcing Schemata Extending ZFC: Truth in the Universe?*, dz. cyt.), gdzie autor pisze o „naturalnych” aksjomatach dotyczących forcingu. C. Freiling w *Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Number Line* („Journal of Symbolic Logic”, 51, 1986, s. 190-200) analizuje pozornie oczywiste aksjomaty implikujące negację hipotezy *continuum* i pewnika wyboru.

⁹⁸P. Maddy, *Believing the Axioms*. I, „Journal of Symbolic Logic”, 53, 1988, s. 481-511; *Believing the Axioms*. II, „Journal of Symbolic Logic”, 53, 1988, s. 736-764.

⁹⁹Jest zbrodnią przeciwko rozumowi próbować zamaskować problem znaturalizowania epistemologii matematyki za pomocą filozoficznych ekstrawagancji. Powierzchnowe problemy związane z intelektualną higieną kauzalnych teorii wiedzy są nieistotne...” W.D. Hart, *Review of Steiner*, „Journal of Philosophy”, 74, 1977, s. 118-129, tu s. 125-126.