

Wiesław Wójcik

Realizacja programu Leibniza w dziejach nauki nowożytnej

I. Dwie wizje prawdy i wolności

Spory toczony od wieków w nauce w znacznej mierze czerpią motywację i argumenty ze sposobu rozumienia takich pojęć, jak prawda i wolność. Od rozumienia tych pojęć, od tego, czy przypisuje się im rangę bytów absolutnych zależy wiele rozstrzygnięć teoriopoznawczych, ontologicznych i naukowych. Myślę, że w okresie nowożytnym ta kwestia szczególnie dobrze widoczna jest na przykładzie dwóch wielkich twórców nowożytnych teorii naukowych i filozoficznych: Kartezjusza i Leibniza.

Dla Kartezjusza prawda jest kresem wolności. Prowadzony przez niego proces radykalnego wątpienia zatrzymuje się na fakcie *cogito*. Otrzymujemy tym samym następujący schemat ontologiczny i poznawczy: *wolność* → *prawda*, który jest podstawą wszelkiego tworzenia, a dokładniej — warunkiem tworzenia jest wolne myślenie. *Cogito*, jako kartezjański fakt filozoficzny, jest nie tyle istniejący, co myślący (jego istnienie jest wtórne w stosunku do myślenia). Bóg, w rozumieniu Kartezjusza, jest absolutnie wolny przy stwarzaniu świata i efektem tej wolności jest świat będący doskonałą maszyną skonstruowaną zgodnie z prawami matematyki. Skoro w przypadku Boga wolność prowadzi do prawdy i porządku, to również wolność człowieka jest w stanie dać te wartości. Dzieje się tak dlatego, iż „absolutna” wolność jest ograniczona myśleniem, które dzięki temu uzyskuje rangę apodyktyczności i oczywistości. Ugruntowanie kartezjańskiej metafizyki jest zawarte w schemacie: *wolność* → *myślenie* → *oczywistość*. Kluczowymi pytaniami metafizyki Kartezjusza stają się pytania o apodyktyczność *cogito* oraz o możliwość istnienia absolutnej wolności ograniczonej przez myślenie, czyli w konsekwencji — wolności, która rodzi prawdę.

Dla Leibniza natomiast, prawda jest fundamentem wolności. U niego mamy odwrócenie kartezjańskiego schematu i pojawia się schemat następujący: *prawda* → *wolność*. Apodyktyczność danych prawd (np. praw logiki) tkwi w centrum całej

go schematu tworzenia. Dopiero na zewnątrz dobudowywane są myślenie i wolność. Leibnizowska metafizyka jest ugruntowana na schemacie: *oczywistość* $\rightarrow$ *myślenie* $\rightarrow$ *wolność*. Bóg stwarzając świat był posłuszny odwiecznym prawom logiki tkwiącym w Jego umyśle. Wolność jest więc ograniczona przez prawdę i zakłada jej uprzednią znajomość. Dopiero tak tworzony świat ma szansę być najlepszym z możliwych. U Leibniza warunkiem tworzenia jest więc myśląca wolność. Wolność jest możliwa, o ile jest myśląca, a ma szansę stać się faktem filozoficznym, jeśli ugruntowana jest w odwiecznej prawdzie, w harmonii przedustawnej. Prawda staje się absolutem ograniczonym przez wolność — nie może być prawdy tam, gdzie nie ma wolności, dawanie wolności jest kryterium autentyczności prawdy.

W dużej mierze okres nowożytny wyznaczony jest przez spór: czy wolność, czy prawda jest absolutem? W przypadku uznania wolności za absolut otrzymujemy dowolność w punkcie wyjścia. Niezależnie od założeń, przyjętych przy budowie teorii, efektem końcowym ma być ta sama prawda. Metodologiczna

„strzałka czasu” tej koncepcji wygląda następująco:
$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \rightarrow p.$$
 Możemy jedno-

znacznie przewidywać przyszłość nie mając jednak pełnego wglądu w przeszłość. W momencie pojawiania się kolejnych faktów przeszłość ulega zatarciu, jest nie do odtworzenia. Jeśli natomiast prawdę uznajemy za absolut, to metodologiczna „strzał-

ka czasu” wygląda inaczej:
$$p \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \end{matrix}.$$
 W tym schemacie metodologicznym możli-

wa jest wiedza jednoznaczna o tym, co było, natomiast przyszłość rozpada się na wiele alternatywnych zdarzeń. To, co można i warto poznać, jest zawarte w przeszłości i to, co później następuje, jest ciągłym procesem degeneracji i gubienia prawdy. Tak jest u Leibniza, tak jest również u Platona.

Istnieje jeszcze trzecia możliwość: tak prawda, jak i wolność mają rangę absolutu. Są nawzajem dla siebie fundamentem wiarygodności. W jaki sposób się to jednak dzieje? Przecież wolny jest ten, kto wie, jak realizować wolność, a więc ten, kto zna prawdę; a prawdę może poznać ten, kto jest wewnętrznie wolny, otwarty na jej przyjęcie. Mamy jakąś formę podwójnej zależności (i zarazem niezależności) prawdy i wolności. Najprostszym rozwiązaniem byłoby ich utożsamienie i taki schemat jest realizowany w mechanice klasycznej: mając dane położenie i pęd cząstki w danej chwili, możemy określić jej położenie w dowolnej chwili późniejszej i wcześniejszej. Pojawia się symetria między przeszłością i przyszłością.

Zasada wzrostu entropii w termodynamice jest zgodna ze schematem Leibniza — energia oraz informacja ulegają stopniowemu rozproszaniu. Koncepcja Wielkiego Wybuchu w kosmologii odpowiada natomiast schematowi kartezjańskiemu — moment wybuchu jest niedostępny poznaniu, a cała dostępna dla nas informacja pojawia się „nieco” później.

II. Cztery główne nurty matematyki europejskiej

Zanim przejdę do ukazania Leibniza programu matematyzacji wiedzy na tle analogicznego programu Kartezjusza, chciałbym podać nieco szerszą perspektywę spojrzenia na dzieje matematyki europejskiej. Pozwoli to umieścić analizowane programy w pewnych ogólnych nurtach badawczych matematyki. Jak zauważyli A. Koyré i O. Pedersen¹, w dziejach matematyki europejskiej można wyróżnić cztery nurty, rozróżnienie między którymi opiera się na zasadniczo odmiennym rozumieniu istoty matematyki, jej metod badawczych oraz miejsca w strukturze wiedzy. Są to nurty: pitagorejski, platoński, arystotelesowski i archimede-sowski. Brak jest jednak u tych historyków nauki wyraźnego rozróżnienia między nurtem pitagorejskim a platońskim — takie rozróżnienie jest istotne dla analiz zawartych w tej pracy.

1. *Nurt pitagorejski*. Według pitagorejczyków zasady matematyki są zasadami wszystkich rzeczy. Wśród zasad matematyki najważniejsze są zasady dotyczące liczb i ich własności. Wszystkie rzeczy są wzorowane na liczbach, co więcej, elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy, wszystko, co istnieje, jest harmonią i liczbą. System liczb tworzy zamkniętą, spójną całość i jeśli poznawana rzeczywistość wydaje się posiadać pewne braki, to należy system świata uzupełnić zgodnie z harmonią i zasadami obowiązującymi wśród liczb. Liczby są tworzywem świata oraz przysługują rzeczom zmysłowym jako własności. Są więc wystarczające zarówno do tego, aby świat skonstruować, jak i do tego, aby istniejący świat poznać. Podstawowymi elementami rzeczy są parzystość i nieparzystość, tzn. za pomocą tych elementów możemy zrozumieć, czym jest liczba oraz zobaczyć, jak pojęcie liczby pozwala zrozumieć znaczenie innych pojęć. Na przykład rozumienie pojęcia „ograniczony” pojawia się w procesie połowienia liczby nieparzystej, a w przypadku połowienia liczby parzystej otrzymujemy rozumienie pojęcia „nieograniczony”. Każda liczba wywodzi się z jedności, stąd liczba 1 jest zarazem parzysta, jak i nieparzysta. Jedność zawiera w sobie przeciwstawne sobie pary pojęć, jak wspomniane ograniczone i nieograniczone, parzyste i nieparzyste, ponadto: kwadratowe i podługne, jedność i wielość, prawe i lewe, męskie i żeńskie, spoczywające i poruszające się, proste i krzywe, jasne i ciemne, dobre i złe. Poszczególne elementy tych par odpowiadają sobie wzajemnie², na przykład to, co nieparzyste odpowiada temu, co kwadratowe, bo $1+3+ \dots + (2n-1) = n^2$, natomiast to, co parzyste — temu, co podługne, bo $2+4+ \dots + 2n = n(n+1)$. Jedność była więc dla pitagorejczyków substancją, o której są orzekane różne, a właściwie wszystkie własności³.

¹ O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza*, Biblos, Tamów 1997, s. 39-54. Tłum. Wł. Skoczny na podstawie wykładów O. Pedersena wygłoszonych w Cambridge w 1988 r.

² Arystoteles, *Metafizyka*, Ks. A rozdz. 5.

³ Myślę, że do tego nurtu można zaliczyć takich matematyków jak: Leibniz, d'Hospital, Cauchy, Frege, Russel, Hilbert.

2. *Nurt platoński*. Wszystkie rzeczy istnieją poprzez uczestniczenie w niezmiennych ideach. Matematyka jest czymś pośrednim między światem Idei a światem zmysłowym — jej przedmioty są wieczne i niezienne, jednak w odróżnieniu od Idei, które charakteryzują się jednością (Idea jest zawsze jedna), mogą występować w wielu podobnych egzemplarzach. Zasadami idei są „Duże” i „Małe” (*τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν*) oraz „Jedność” (*τὸ ἓν*) określająca ich istotę. Poprzez uczestniczenie w Jedności idei, z Dużego i Małego powstają liczby⁴. Dla Platona liczby istnieją niezależnie od świata zmysłowego; dla pitagorejczyków zaś — były elementami tego świata. Ponadto elementem konstytutywnym (materia czy substratem) liczb i pierwszą ich zasadą jest nie jedność, lecz *Dyada* (nieokreślone 2). Pewne przeciwstawne sobie zasady nie mają przyczyny w jedności, jak u pitagorejczyków, lecz każda z nich ma osobną przyczynę. Metody matematyki mają za zadanie łączyć te przeciwstawne zasady w jedno⁵.

3. *Nurt arystotelesowski*. Miejsce i rola matematyki wiązały się z wprowadzoną przez Arystotelesa klasyfikacją nauk⁶. Podzielił on nauki na teoretyczne, praktyczne i wytwórcze. Matematyka znalazła się wśród nauk teoretycznych, obejmujących poza nią fizykę i metafizykę. Wszystkie nauki teoretyczne zajmują się tym, co nie może być inne niż jest. Do zakresu jej badań nie należą żadne przedmioty same w sobie, lecz jedynie przedmioty ze względu na liczbę i kształt. Matematyka jest więc nauką o ilości i formach geometrycznych. To, co bada (czyli liczba i formy geometryczne), jest ściśle związane z materią, w której tkwi, chociaż jest nieruchome. To odróżnia ją z jednej strony od fizyki, która zajmuje się przedmiotami materialnymi zdolnymi do ruchu, a z drugiej — od metafizyki, której przedmioty badań są nieruchome i całkowicie oddzielone od materii; jest umieszczona pomiędzy fizyką i metafizyką, jeśli chodzi o zakres badań.

4. *Nurt archimedesowski*. W odróżnieniu od Platona czy pitagorejczyków rozumowanie dedukcyjne oparte na pierwszych zasadach nie jest dla Archimedeasa metodą odkrywania nowych twierdzeń. Ścisłe dowody dedukcyjne są natomiast potrzebne do wykazania ich prawdziwości. Do odkrywania twierdzeń stosuje Archimedes analogie między różnymi obszarami wiedzy. Bada pewne zagadnienia matematyczne przy pomocy praw mechaniki. Dowodzi np. opierając się na słynnym prawie dźwigni, że stosunek objętości kolejno wpisanych w siebie stożka, kuli i walca wynosi 1:2:3. Uważa jednak, że o ile ten mechaniczny dowód daje wgląd w istotę problemu i rozjaśnia całe zagadnienie, to nie stanowi dowodu matematycznego⁷.

⁴ Tamże, Ks. A rozdz. 6.

⁵ Do tego nurtu należą: Kartezjusz, Lagrange, d'Alembert, Weierstrass, Cantor, Poincaré, Brouwer.

⁶ Arystoteles, *Fizyka*, Ks. II rozdz. 2.

⁷ Archimedes, *Postanije k Jeratosfienu o miechaniczeskich tieoriamach*, w: *Soczinienija*, Moskwa 1962, s. 298-327.

Pojawia się więc podział pracy matematycznej na dwa etapy: 1) etap odkrywania i rozjaśniania twierdzenia; 2) etap ścisłego dowodu dedukcyjnego odkrytego wcześniej faktu. Ważne jest to, iż pierwszy, odkrywający etap nie jest etapem dowolnych spekulacji i mętnych intuicji, lecz również podlega metodzie, wprowadzając nie ściśle matematycznej, jednak opierającej się na ustalonych rygorach i ścisłości. Stosując więc odpowiednie analogie, możemy zasady i prawa jednej dziedziny wiedzy wykorzystywać do odkrywania prawd w innych dziedzinach. W celu uzyskania jednak ścisłego dowodu musimy na końcu oderwać się od wcześniej wykorzystanej analogii i metodami autonomicznymi, wewnętrznymi dla danej dziedziny, uzasadnić tę prawdę. Matematyka może więc wykorzystywać wyniki innych nauk (i sama być przez nie wykorzystywana), jednak ścisłe dowodzenie odkrytych faktów musi być dokonywane metodami charakterystycznymi dla danej teorii. U Archimidesa mamy interesujące połączenie koncepcji platońskiej (*Dyada* przy odkrywaniu nowych praw) i pitagorejskiej (jedność metodologiczna jako podstawa konstrukcji teorii)⁸.

III. Kartezjusz i Leibniz — dwa projekty matematyzacji wiedzy

Zarówno Kartezjusz, jak i Leibniz próbowali stworzyć naukę uniwersalną. Jednak sposób, w jaki konstruowali tę naukę, był zasadniczo inny. Materia, jako substancja rozciągła, dzieląca się w nieskończoność, nie mogła stanowić podstawy konstrukcji wiedzy w przypadku Kartezjusza. Dzieląc daną część materii na coraz mniejsze części, nigdy nie otrzymamy części „prostszej” — elementy tego podziału tworzą strukturę całkowicie jednorodną. Podstawą całej konstrukcji dla Kartezjusza miały być czyste, proste metody wzięte z ówczesnej matematyki, czyli algebry i geometrii. Tylko przejścia rozumowe pomiędzy elementami ciągu rozumowania miały strukturę dyskretną — ponieważ istnieje skok między różnymi elementami rzeczywistości (substancjami), to również struktura rozumowania musi być dyskretna. Z matematycznych dowodów i rozumowań można było wydobyc nieredukowalne metody, stanowiące podstawę konstrukcji wiedzy, natomiast pierwotne elementy tej konstrukcji były nieistotne. Najpierw określamy dwa różne obszary, następnie odkrywamy czy tworzymy metody pozwalające przechodzić z jednego obszaru do drugiego. Pierwotne elementy poszczególnych obszarów pojawiają się jako efekt działania tych metod; mówiąc językiem współczesnym, są niezmiennikami odwzorowania jednego obszaru w drugi.

W celu zrozumienia nowych prawd należy mieć przynajmniej dwa różne obszary, w których dane są pewne jasne i wyraźne elementy. Przy pomocy metod łączących te posiadane już elementy można dojść do zrozumienia nowych bytów i pojęć — jest to proces stopniowy. Zauważmy, że program kartezjański mieści się w nurcie platońskim: w przypadku Kartezjusza Jednością idei stała się metoda

⁸ Do tego nurtu można zaliczyć Newtona, Eulera, Gaussa, Riemanna.

naukowa, natomiast rolę platońskiej *Dyady*, będącej substratem wszelkich konstrukcji, pełnią dwa zasadniczo odrębne obszary (substancja myśląca i rozciągła i odpowiadające temu podziałowi — arytmetyka i geometria).

Prawda nie jest w tym ujęciu elementem rzeczywistości — żadna analiza świata nie daje możliwości dotarcia do trwałego i pewnego elementu. Prawda jest związana z poznawaniem rzeczywistości, jest cechą metody, a nie bytu. W procesie radykalnego wątpienia nie jesteśmy w stanie dotrzeć do rzeczywistości; odkrywamy w efekcie tego procesu pewną i niezawodną (prawdziwą) metodę, przy pomocy której odtwarzamy (konstruujemy) istniejący świat. Prawda świata ujawnia się dopiero jako efekt działalności naukowej.

Materia Leibniza też dzieli się w nieskończoność, jednak na pewnym etapie podziału otrzymujemy nową jakościowo monadę. W każdej z nich odbija się mniej lub bardziej wyraźnie cały świat. W oparciu o pewną ilość monad (przyjętych jako alfabet) można odtwarzać wszystkie inne byty. Wybór alfabetu (czyli związany z nim etap podziału rzeczywistości) jest w znacznej mierze kwestią formalną.

Przy konstrukcji nauki uniwersalnej Leibniz wzorował się na sylogistyce Arystotelesa. Chciał w analogiczny sposób opracować inne reguły rozumowań i dedukcji. W tym celu należy, według niego, poprzez analizę pojęć istniejących w umyśle, opracować katalog pojęć pierwotnych (alfabet myśli) i nadać im status formalny, przypisując im symbole, tzw. „charaktery”. Leibniz oczywiście zakładał, że każde pojęcie można rozłożyć na skończoną ilość pojęć pierwotnych. Jak przy pomocy dziesięciu cyfr można otrzymać każdą liczbę (mimo, iż tych liczb jest nieskończenie wiele), tak samo przy pomocy alfabetu myśli będzie można utworzyć dowolne pojęcie. Wszystkie pojęcia będzie więc można otrzymać poprzez odpowiednią kombinację charakterów. Automatycznie, procedura ta będzie zawierała dowody wszystkich możliwych faktów — zdanie *A* będzie wynikać ze zdania *B*, jeśli po rozłożeniu pojęć tworzących te zdania na pojęcia pierwotne, okaże się, że zbiór charakterów otrzymanych ze zdania *B* zawiera się w zbiorze charakterów zdania *A*. Dzięki grze na symbolach wolnych od zbędnych i nieuchwytnych treści, wiedza ludzka będzie wiedzą pewną, analityczną. Wszystkie pojęcia tworzące alfabet myśli nazywa Leibniz „wyrażeniami pierwszego rzędu” — tworzą one tzw. pierwszą klasę. Do drugiej klasy należą pary wyrażen pierwszego rzędu, do trzeciej klasy — trójki wyrażen pierwszego rzędu lub pary utworzone z wyrażen odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu itd.

W celu całkowitej precyzji rachunków podaje Leibniz projekt arytmetyzacji logiki. Wychodzi od analogii między rozkładem pojęć na pojęcia pierwszego rzędu, a rozkładem liczb na czynniki pierwsze. W tej logice arytmetycznej każdemu pojęciu ma odpowiadać pewna liczba całkowita, przy czym pojęciom pierwotnym mają być przyporządkowane ustalone liczby pierwsze (pojęciom przeciwnym mają odpowiadać liczby przeciwne). To przyporządkowanie ma przebiegać zgodnie z następującą regułą: dowolnemu pojęciu *a* przyporządkowujemy

liczbę całkowitą będącą iloczynem liczb pierwszych odpowiadającym pojęciom pierwotnym, na które pojęcie a się rozkłada. Jednoznaczność tego przyporządkowania wynika z jednoznaczności rozkładu liczby na czynniki pierwsze⁹.

W konstrukcji rachunku różniczkowego do standardowych pojęć pierwotnych logiki i arytmetyki proponuje Leibniz dołączyć pojęcie „nieskończenie małej”, tzw. różniczki. Traktuje to pojęcie jako obiekt idealny, który podlega tym samym prawom, co zwykle liczby. Jest to dla niego użyteczna fikcja, dzięki której rachunki się znacznie upraszczają, a w razie potrzeby zawsze można z pojęcia różniczki zrezygnować, zastępując je wielkościami, które są na tyle małe lub duże, aby błąd obliczeń nie przekroczył żądanej wielkości. Nawiązuje tym samym do metody wyczerpywania Archimedesesa, przedstawiając ją jako „koronną i ostateczną” metodę dowodzenia. Metodzie wyczerpywania nie podlega jednak jego słynna zasada ciągłości — ta zasada jest pierwotna wobec wszelkich innych metod i reguł i stanowi podstawę wszelkich rozumowań. To na podstawie tej zasady nieskończenie małe i nieskończenie duże liczby podlegają tym samym prawom, co zwykle liczby.

Zauważmy, że ponieważ różniczkom Leibniza nie przysługuje pełna realność, więc mają one charakter symboliczny. Zgodnie z jego projektem nauki uniwersalnej, pojęciu różniczki przypisujemy symbol (wielkości x odpowiada symbol różniczki dx) i na tak otrzymanych symbolach wykonujemy działania zgodnie z przyjętymi regułami. Program Leibniza można umieścić w ramach nurtu pitagorejskiego — konstrukcja nauki ma strukturę wertykalną: pojęcia dołączane do matematyki mają sens same w sobie, są jednością-substratem, z którego budowane są nowe pojęcia. Jedynym kryterium łączenia poszczególnych elementów jest spójność i logiczność budowanej struktury.

Nawiązując do Leibniza koncepcji prawdy i wolności, zauważmy, że w wyniku analizy rzeczywistości docieramy do takich jej elementów (są to monady), przez które docieramy do struktury logicznej harmonii przedustawnej, a więc do prawdy bytu. W celu zachowania poprawności teorii naukowej, na każdym kroku jej konstrukcji musimy odwoływać się do tej logicznej struktury poznanej na początku. Rozwój wiedzy może łatwo zagubić tę pierwotną prawdę bytu.

IV. Przykłady realizacji koncepcji Kartezjusza (Lagrange, d'Alembert) oraz Leibniza (de l'Hospital, Cauchy, Bolzano) w matematyce XVIII i XIX wieku

Newton oraz Leibniz rozszerzyli matematykę o nowe podstawowe pojęcia, które pozwoliły opanować metodą matematyczną nowe obszary badań. Były to pojęcia pochodnej i całki (*fluksja* i *fluenta* Newtona). Szczególną karierę zrobiło pojęcie nieskończenie małej Leibniza (różniczki), które było podstawą definicji

⁹ G. W. Leibniz, *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*, Paris 1903, s. 49-57.

pochodnej i całki, przynajmniej w przypadku Leibniza (zresztą sam Newton też tym pojęciem często operował). Pojęcie to, które traktowano z powodu jego nieścisłości i tajemniczości związanej z nieskończonością jako pojęcie metafizyczne (w pejoratywnym znaczeniu), budziło wiele emocji. Można się go było pozbyć, ale za cenę znacznego skomplikowania rachunków; z drugiej strony, operowanie czymś nieuchwytnym i niezrozumiałym wydawało się niegodne matematyki. Na przykładzie traktowania tego pojęcia przez różnych matematyków można zobaczyć różnicę między programem kartezjańskim matematyzacji wiedzy a programem Leibniza. Dlaczego w duchu programu Leibniza włączenie do matematyki nowego, lecz nieścisłego pojęcia, było czymś dopuszczalnym, natomiast program kartezjański zasadniczo się temu sprzeciwiał?

Program Kartezjusza

D'Alembert wystąpił z ostrą krytyką pojęcia różniczki¹⁰. Sądził on, że pojęcie nieskończenie małej nie jest w rachunku różniczkowym potrzebne. Jest pojęciem sprzecznym w sobie, gdyż traktuje się ją jako wielkość znikającą, która jednak nie zniknęła całkowicie; albo ta wielkość nie zniknęła, czyli jest wielkością skończoną, albo zniknęła i wtedy po prostu jej nie ma. Nie istnieje jakiś tajemniczy stan pośredni — wpuszczanie do matematyki chimer może prowadzić do zasadniczych sprzeczności. Zamiast rozumieć pochodną jako stosunek wielkości nieskończenie małych wystarczy wprowadzić pojęcie granicy i pochodną rozumieć jako granicę stosunków odpowiednich wielkości (skończonych). Dla d'Alemberta wielkość a jest granicą wielkości b , jeśli b może zbliżać się do a na odległość mniejszą od jakiegokolwiek z góry zadanej. Znaczy to, że różnica między wielkością a i b (przez którą Leibniz rozumiał wielkość nieskończenie małą) nie jest żadną wielkością, jest czymś całkowicie niewyraźnym. Jednak ta różnica nie musi nas interesować przy rozpatrywaniu granicy. Zamiast używać metafizycznego pojęcia „nieskończenie małej” wystarczy wprowadzić pojęcie operacyjne granicy wielkości skończonych i efekt jest taki sam. Na tym właśnie polega metoda Kartezjusza: nie wprowadza się do nauki niepojmowalnych idei, lecz za pomocą przyjętych metod i na podstawie prostych i jasnych idei, konstruuje się inne, złożone, mniej oczywiste dla umysłu.

Podobnie w duchu kartezjańskim jest sformułowana przez Lagrange'a teoria funkcji pochodnych¹¹. W teorii tej, aby uniknąć przy definiowaniu pochodnej używania pojęcia nieskończenie małej (różniczki), wykorzystuje się metodę rozwijania funkcji f w szereg potęgowy. Pochodna f' funkcji f jest po prostu współczynnikiem przy pierwszej potędze rozwinięcia funkcji f . Samo rozwijanie

¹⁰ J. R. d'Alembert, *Différentiel* oraz *Limite*, w: *Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières (Mathématiques)*, t. 4 oraz 9, Paris-Liège 1784-1789.

¹¹ J. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797.

funkcji w szereg potęgowy należało przeprowadzić w sposób czysto algebraiczny. Opierając się więc na jasnym i oczywistym pojęciu (pojęciu rozwinięcia w szereg) innej teorii można unikać potrzeby operowania pojęciami mętnymi.

Program Leibniza

Często wyrażany jest pogląd, że program arytmetyzacji analizy (tzn. zdefiniowania pojęć granicy, ciągłości, pochodnej itp. przy pomocy liczb) był nawiązaniem do koncepcji pitagorejskiej. Jednak nie w oparciu się na liczbach leży istota nurtu pitagorejskiego. Po kryzysie związanym z odkryciem odcinków niewspółmiernych próbowano budować matematykę opierając się na obiektach geometrycznych (punkt, a nie liczba, stał się matematyczną monadą, substratem i jednością) — liczby, jak i działania na liczbach, były wyjaśniane geometrycznie i tylko w ten sposób. W programie arytmetyzacji bierze udział zarówno Cauchy (w nurcie pitagorejskim), jak i Weierstrass, Dedekind i Cantor (w nurcie platońskim).

De l'Hospital, autor pierwszej książki dotyczącej rachunku różniczkowego i całkowego, traktował różniczki jako nowe liczby, o które wzbogacona została matematyka¹². Wykonywał na nich działania arytmetyczne jak na zwykłych liczbach. Rozumienie pojęcia różniczki opiera się u niego na intuicji („*La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la différence*”), a aksjomaty pokazujące reguły operowania różniczkami są nośnikiem prawdy przekazywanej twierdzeniom rachunku w sposób dedukcyjny. Ta prawda aksjomatów opiera się na przypisaniu różniczkom realnego istnienia (sam Leibniz miał co do tego pewne wątpliwości).

Oryginalne stanowisko, będące jednak w duchu programu Leibniza, reprezentuje Bernard Bolzano. Matematyka była dla niego nauką badającą ogólne prawa, które regulują istnienie rzeczy¹³. Przypisanie tak znaczącej roli matematyce można odnaleźć chyba tylko w koncepcji pitagorejskiej — tam również matematyka przenikała rzeczywistość, a jej prawa były prawami istnienia. Bolzano nie uznawał „diadycznego” sposobu budowy matematyki. Uważał, że w niedopuszczalny sposób narusza się metodę, gdy prawdy analizy czy algebry wyprowadza się za pomocą pojęć geometrycznych. I nie istotne jest to, że prawdy geometryczne, z których się korzysta, są oczywiste. Są to jednak prawdy pochodne w stosunku do oczywistych prawd analizy (przykładem jest niezgodne z metodą matematyczną uzasadnianie twierdzenia Bolzano o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie za pomocą rysunków linii ciągłych w geometrycznym sensie). Odrzucał, z tego samego powodu, dowody mechaniczne, gdyż występujące w mechanice

¹² G.F.A. de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696.

¹³ B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague 1817.

pojęcia np. ruchu, mimo że w ramach mechaniki oczywiste i zrozumiałe, nie mają uzasadnienia matematycznego — w nurcie platońskim czy archimedesowskim tego typu podejście byłoby całkowicie uzasadnione. Uznaje natomiast pojęcie wielkości nieskończenie małej (jak również nieskończenie wielkiej) i definiuje ją następująco: wielkość jest nieskończenie mała, jeśli dla ustalonej jednostki każda wielokrotność tej wielkości jest mniejsza od jednostki. Ta prosta definicja (wykorzystująca pojęcia logiczne oraz pojęcia wielkości i liczby) sprawia, że pojęcie różniczki zostało w sposób spójny włączone w strukturę analizy. Bolzano nie uznawał jednak różniczki jako liczby.

Kolejną postacią, realizującą program Leibniza, jest Cauchy. Pojęcie wielkości nieskończenie małej jest podstawowe w jego słynnym kursie analizy¹⁴. Tę wielkość traktuje nie jako liczbę, lecz jako zmienną, która przebiega wartości zbliżone do zera. Są to nie tylko formalne symbole, lecz podstawowe byty specjalnego rodzaju. Bez żadnych oporów wykonuje na wielkościach nieskończenie małych operacje arytmetyczne, jak na liczbach. Pojęcie funkcji jest dla niego pojęciem wtórnym zbudowanym na pojęciu wielkości nieskończenie małej, a nie na odwrót, jak jest w „klasycznej” analizie zbudowanej później, między innymi przez Weierstrassa, Dedekinda i Cantora (klasycznie funkcja rozumiana jest jako para zbiorów z ustalonym przyporządkowaniem elementów jednego zbioru elementom drugiego).

V. Analiza niestandardowa Abrahama Robinsona a Leibniza program matematyzacji wiedzy

Pojęcie granicy jest podstawowym pojęciem analizy matematycznej. Inne pojęcia są w znacznej mierze oparte na tym właśnie pojęciu. Tak jest z pojęciem ciągłości, całki, pochodnej, sumy szeregu itd. Jednak klasycznie uznawana definicja granicy jest mało intuicyjna, mimo że dość prosta w swojej formie: liczba g jest granicą ciągu liczb a_n , jeśli, dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje liczba N o takiej własności, że $|a_n - g| < \varepsilon$, dla każdego $n > N$. Odwoływanie się przy definiowaniu pojęć czy dowodzeniu twierdzeń do tak rozumianego pojęcia granicy jest standardem, od którego uchylanie się jest najczęściej uznawane za błąd, a w najlepszym razie za brak ścisłości.

Znacznie bardziej zgodna z intuicją jest inna („nieściśła”) definicja, mówiąca że liczba g jest granicą ciągu liczb a_n , jeśli, dla liczb n bliskich nieskończoności, liczba a_n jest nieskończenie blisko liczby g . Ta definicja nawiązuje do idei Leibniza.

Mimo realizacji programu Leibniza znaczną przewagę w XVIII i XIX wieku miał kartezjański program matematyzacji. Dopiero w XX wieku wraz z powstaniem analizy niestandardowej wyraźniej przywrócono do łask ideę Leibniza. Abra-

¹⁴ A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris 1821.

ham Robinson, twórca tej nowej teorii¹⁵, wychodzi od zasadniczej sprzeczności między tym, co intuicyjnie oczywiste i nieściśle, a tym, co ściśle, jednak pozbawione intuicyjnej oczywistości. Czy możemy tę sprzeczność pogodzić?

Jak widzieliśmy wcześniej, Leibniz próbował usunąć tę sprzeczność przez odwołanie się do metody wyczerpywania Archimedesesa oraz przez oparcie się na zasadzie ciągłości. Robinson proponuje inne wyjście z tej sprzeczności. Ma nim być wykorzystanie logiki w rachunku nieskończenie małych. Nawiązuje przy tym do idei Leibniza konstrukcji nauki uniwersalnej.

Dla zbioru liczb rzeczywistych R wprowadzamy formalny język L , w ramach którego będzie można wyrazić wszystkie zdania dotyczące R . Język ten musi być więc bardzo bogaty; ma zawierać symbole wszystkich liczb rzeczywistych, wszystkich relacji n -argumentowych na liczbach rzeczywistych, wszystkich podzbiorów R , relacji między tymi podzbiórami itd. Oprócz tego L musi zawierać spójniki logiczne oraz kwantyfikatory. Niech K oznacza zbiór wszystkich prawdziwych zdań o R , wypowiedzianych w języku L . Na podstawie standardowego twierdzenia logiki istnieje rozszerzenie właściwe R^* zbioru R , które jest modelem K , co oznacza, że wszystkie zdania ze zbioru K są również prawdziwe w odniesieniu do R^* , oczywiście przy odpowiedniej (dopuszczalnej) interpretacji. Na przykład, jeśli S jest pewnym podzbiorem R , to istnieje podzbiór dopuszczalny S^* w zbiorze R^* , przy czym S i S^* są oznaczone przez ten sam symbol z języka L . Oczywiście zbiór $R^* \setminus R$ jest niepusty. Robinson zbiór R^* nazywa niestandardowym modelem analizy, a liczby z tego zbioru — liczbami rzeczywistymi, przy czym liczby ze zbioru R noszą nazwę standardowych liczb rzeczywistych¹⁶.

W przypadku zbioru liczb rzeczywistych prawdziwa jest następująca własność (zwana aksjomatem Archimedesesa):

Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x i y istnieje liczba naturalna $n > 0$ taka, że $y < nx$.

Okazuje się, że w przypadku R^* ta własność nie zachodzi, tzn. istnieją takie liczby $x > 0$ i $y > 0$, że $x \leq \frac{y}{n}$ dla dowolnej standardowej liczby naturalnej n (jeśli natomiast n przebiega wszystkie liczby naturalne — również nieskończone — to aksjomat Archimedesesa jest prawdziwy). Stąd wynika, że x jest liczbą mniejszą od dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej, czyli jest liczbą nieskończenie małą. Analogicznie, y jest liczbą większą od dowolnej liczby rzeczywistej, czyli jest to liczba nieskończenie duża. Ponadto, prawdziwe jest twierdzenie, że dla każdej liczby rzeczywistej $a^* \in R^*$, istnieje standardowa liczba rzeczywista a taka, że $a^* - a$ jest liczbą nieskończenie małą.

¹⁵ A. Robinson, *Nonstandard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1966.

¹⁶ Tamże, s. 6-23.

Z powodu „częściowego” nieobowiązywania aksjomatu Archimedesesa, struktura prostej rzeczywistej rozpatrywana w ramach analizy niestandardowej musi obyć się bez tych własności. Na ten fakt można jednak spojrzeć również z innej strony. Z powodu fałszywości powyższych twierdzeń, analiza niestandardowa bada większą ilość bytów i własności, niż analiza standardowa. Między innymi okazuje się, że uzupełnienie liczb wymiernych o liczby niewymierne nie powoduje usunięcia „luk” na prostej rzeczywistej oraz że istnieją zbiory spójne na prostej, nie będące odcinkami. Może to mieć doniosłe znaczenie filozoficzne — brak jakiegoś rodzaju bytów może wynikać z niedostatecznych narzędzi logicznych. Należy więc uprzednio rozszerzyć aparat logiczny „ponad miarę”, nie przejmując się „brzytwą Ockhama”, a otrzymamy pożądaną własność.

Chciałbym podać prostą analogię związaną z systemem pozycyjnym. W rzymskim układzie liczbowym w razie potrzeby wprowadzano nowe liczby; nie istniały symbole dla dowolnie dużych liczb. Z powodu nieskończonej ilości liczb wydaje się niemożliwe podanie symboli ich wszystkich — układ pozycyjny rozwiązuje ten problem w znany sposób. Zauważmy, że w matematyce (klasycznej) nadal przy używaniu symboli obowiązuje rzymski schemat, tzn. wprowadzamy nowe symbole w razie potrzeby, natomiast teoria Robinsona wprowadza bogaty język symboli, można powiedzieć, że mnoży byty bez potrzeby.

Można podać jeszcze jedną konsekwencję filozoficzną teorii Robinsona. Leibniz, wprowadzając liczby nieskończenie małe, nie przypisywał im realności jak zwykłym liczbom, lecz traktował je jako byty fikcyjne, wyimaginowane. Dopiero dzięki ogólnej (filozoficznej) zasadzie ciągłości te idealne liczby zostały wyposażone w te same prawa, jakie przysługiwały zwykłym liczbom. Okazuje się, że aparat logiczny może w pewnych przypadkach zastąpić potrzebę posługiwania się ogólnymi zasadami pierwotnymi. Analiza niestandardowa jest w pewnym stopniu realizacją (modelem) filozofii Leibniza, a dokładniej — tezy mówiącej, że logika leży u podstaw całej rzeczywistości.

VI. Współczesne koncepcje filozofii nauki (Husserl, Frege, Wittgenstein, Lakatos) a projekt nauki Leibniza

Poprzez pochylenie się nad pewnymi tekstami wybranych współczesnych filozofów chciałbym ukazać, że program Leibniza jest obecny w kulturze współczesnej jako pewien sposób rozumowania — jest on schematem, w którym często nieświadomie umieszcza się dane analizy, aby nadać im prawomocność i wiarygodność.

1. Niech podstawą analizy będzie praca Husserla *O pochodzeniu geometrii*¹⁷. Aby zrozumieć, czym jest wiedza geometryczna, jakie jest źródło jej sensu, musi-

¹⁷ E. Husserl, *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentionalhistorisches Problem*, „Revue Internationale de Philosophie” R. 1, 1939, nr 2, s. 203-225.

my spytać o pierwotny sens przekazanej nam przez tradycję tej jedynej geometrii obowiązującej teraz i od zawsze. Husserl zauważa, że to, iż „wszystkie nowe użytki wyrażają rzeczywistą prawdę geometryczną, jest rzeczą *a priori* pewną”, pod warunkiem, że „reaktywują pierwotne aktywności zamknięte w podstawowych pojęciach, bez «co» i «jak» przednaukowych tworzyw tych aktywności”¹⁸. Jeśli tego nie czynią, jeśli nie reaktywują prapoczątków, a jedynie przekazują metody konstruowania nowych twierdzeń, to są nieautentyczne. Husserl zarzuca geometrii, i nie tylko geometrii, brak autentyczności. Nauka musi wrócić do teoriopoznawczego uzasadnienia samej siebie, gdyż z zasady historia nauk szczegółowych, w sensie zwykłej historii faktów, nic z tego, co należy do jej tematu, nie może uczynić zrozumiałym¹⁹. Każdy obiekt, byt istniejący w danej nauce rozwija się przyjmując ciągle nowe sensy, ma wewnętrzną strukturę sensu. Nie chodzi o badanie i porównywanie różnych faktów (sprowadza się to do patrzenia na naukę z perspektywy praktyk magicznych jej uprawiania, gdyż właściwych niemal wyłącznie dla ludzi danej epoki), lecz o uchwycenie jedności danego obiektu występującego w różnych historycznych przejawach — chodzi o budowę historii wewnętrznej. Dany teraźniejszy obiekt jest nawarstwieniem sensów ufundowanych w pewnym prasensie, który badania historyczne powinny odkryć.

2. Słynna zasada semantyczna Fregego, że o znaczenie słów należy pytać zawsze w kontekście zdania²⁰, a nigdy z osobna, wyjaśnia znaczenie różniczki. Pierwotny jest sens równania $df(x)=f'(x)dx$, w którym pojawia się symbol różniczki dx i dopiero w kontekście tego równania nabiera znaczenia symbol dx . Podobnie jest w przypadku liczby (jest to przedmiot idealny — istnieje obiektywnie, jednak nie w sposób przestrzenny). Jak dotrzeć do znaczenia, sensu liczby, czyli do jej pojęcia? Trzeba najpierw ustalić sens równości liczbowej, co ustali w konsekwencji sens zdań, w których pojawiają się liczby. W nurcie platońskim potrzeba *Dyady* pojęć, aby ustalić sens nowego pojęcia. Tu natomiast wystarczy mieć sens zdania, w którym dane pojęcia występują. Oto inny prosty przykład podany przez Fregego: zamiast mówić, że dwa odcinki są równe pod względem długości, należy powiedzieć, że długość (jedna) odcinków jest równa. Wygląda to tylko na zmianę sformułowania, lecz jest to przejście od dualizmu do monizmu.

3. Rozpatrzmy dwie tezy L. Wittgensteina z pracy *O pewności*²¹: tezę 216, która stwierdza: „Zdanie «To jest napisane»” oraz tezę 221: „Czy mogę wątpić w to, w co chcę wątpić?” Prawdziwość zdania z tezy 216 zależy od sposobu użycia (kiedy je zapisuję, jest prawdziwe, kiedy natomiast je wypowiadam, jest fałszywe). Podanie takiego sformułowania jako tezy mającej wartość epistemologiczną (a chyba o to chodzi Wittgensteinowi) jest wyjściem poza nurt platoński.

¹⁸ Tamże, s. 23-24.

¹⁹ Tamże, s. 30.

²⁰ G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.

²¹ L. Wittgenstein, *On Certainty*, Oxford 1969.

Czy mieści się w nurcie pitagorejskim? Tak, jeśli nie odrzucamy sensu jako takiego. Przecież sens tej wypowiedzi określony jest przez wszystkie możliwe jej użycia — zbiór tych wszystkich możliwych użycí należy traktować jako sens tej wypowiedzi. Analogicznie jest z wypowiedzią: „Ja zawsze kłamię” (pewna modyfikacja paradoksu kłamcy). Nie należy rozpatrywać tego zdania samego w sobie, lecz w odniesieniu do zbioru wszystkich możliwych jego realizacji. Zanim postawi się pytanie, czy ta wypowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa, trzeba najpierw zapytać, czy możliwe jest, by zawsze kłamać, tzn. czy istnieje jakakolwiek realizacja tej wypowiedzi. Analizując tezę 221 zauważmy, że wątplenie jest podważaniem prawdziwości czegoś, dotyczy więc obszaru prawda-falsz; natomiast wola i pragnienia nie podlegają ocenom tego typu. Czyli kontekst użycia prawdy jest jeden i obiektywny, np. nie można go zmienić decyzją z zewnątrz lub indywidualnym, subiektywnym aktem; bo — jak mówi Wittgenstein w tezie 235 — „to, co jest dla mnie ustalone, nie ma swych podstaw w mojej głupocie czy łatwowierności (to znaczy, że naprawdę nie ma wpływu ani mój rozum, ani wola)”.

4. I. Lakatos występował przeciwko patrzeniu na matematykę z dualistycznego punktu widzenia: albo sceptycyzm podważający jej rezultaty, albo dogmatyzm mówiący o niezmienności i absolutnej nieomyślności jej twierdzeń. Jeśli przyjmiemy, że prawda spływa do twierdzeń matematyki ze szczytu aksjomatów za pomocą dedukcji, to równie dobrze możemy przyjąć, że „fałsz” nowych pomysłów płynie w górę w kierunku „ustalonych” twierdzeń (za pomocą swoistej indukcji), zmieniając ich znaczenie i wartość. Należy odrzucić dualizm: sceptycyzm *versus* dogmatyzm, a przyjąć koncepcję twierdzącą, że rozwój teorii matematycznych polega na ciągłym przyjmowaniu nowych treści i znaczeń. Stare wyniki nie ulegają odrzuceniu, lecz ubogacają się o nowe aspekty i sensy²².

Działanie, w pewnych istotnych momentach rozwoju matematyki, metody dowodów i kontrprzykładów (na fakt ten zwrócił uwagę właśnie Lakatos²³) ukazuje, że sens twierdzeń i znaczenie pojęć jest generowany przez pierwotne dowody i kontrprzykłady, nawet jeśli później te dowody zostały uznane za błędne, a kontrprzykłady za nietrafne. To prawda ukryta w pierwotnej intuicji i rozumowaniu sprawia, że rozwój matematyki charakteryzuje się ciągłością i racjonalnością. Przy patrzeniu na koncepcję Lakatosa z punktu widzenia dualizmu platońskiego, wydaje się ona trywialna i mało interesująca: przecież każdy wie, że nowe twierdzenia i pojęcia rodzą się w procesie ścierania się ze sobą rozumowań potwierdzających daną hipotezę, a kontrprzykładami próbującymi ją obalić. Jednak pojęcia generowane w trakcie rozwoju matematyki nie są wynikiem „walki” między pierwotną hipotezą i jej dowodem a kontrprzykładami (mimo że czasami wypo-

²² I. Lakatos, *A Renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, w: *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, s. 199-202.

²³ I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge 1976.

wiedzi Lakatos'a zdają się taką ewentualność sugerować), lecz efektem „nawarstwiania się sensów” pochodzących od dowodów i kontrprzykładów. Trzeba ciągle odwoływać się do tej wcześniejszej prawdy. I dlatego w tej koncepcji szczególne znaczenie mają badania historyczne pozwalające odnajdywać i ochraniać ten pierwotny i podstawowy sens pojęć decydujący o całym późniejszym rozwoju²⁴.

The Leibnizian Project in Contemporary Sciences

It is commonly believed that mathematics has a uniform structure and that the same rules of rationality are applicable in all its branches. This can not possibly be true, if we keep in mind that from the ancient times to this day four different styles of thought have flourished in mathematics, initiated by Pythagoras, Plato, Archimedes and Aristotle. The author analyzes two of these approaches, the Platonic and Pythagorean. He points out that contemporary representatives of these two views find it very difficult to understand one another, and tend to accuse the other side of being irrational. They are not so much irrational, argues the author, as dedicated to different models of rationality. This broad picture offers a backdrop for the analysis of the philosophies of E. Husserl, G. Frege, L. Wittgenstein and I. Lakatos. Their style of thought can be described as belonging to the Pythagorean-Leibnizian tradition. This orientation aptly combines philosophical and mathematical concerns in its classic works, and thereby offers an illuminating analysis of some intricate philosophical problems.

²⁴ W. Wójcik, *Zastosowanie metody dowodów i kontrprzykładów w badaniach z zakresu historii i filozofii matematyki*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” R. 40, 1995, nr 1, s. 21-39.