

Anna Wójtowicz

Spór o zdania atomowe*

W literaturze filozoficznej — szczególnie tej związanej z nurtem filozofii analitycznej — często pojawia się problem wyróżnienia wśród zdań rozważanego języka zdań z pewnych powodów podstawowych. Nazywano je zdaniami prostymi, elementarnymi (Wittgenstein), bazowymi, protokolarnymi czy atomowymi (Russell). Różne były kryteria wyróżniania takich zbiorów zdań i w związku z tym — różne były to zbiory. Celem artykułu jest ustalenie, czy — niezależnie od przyjmowanego kryterium — zbiory te mają pewne własności wspólne (część I) i w jakim stopniu własności te są jednocześnie spełnialne (część II). Aby ujednolicić terminologię, wyróżniony zbiór zdań będziemy nazywać zbiorem zdań atomowych (co oczywiście nie oznacza, że przyjmujemy w ten sposób Russellowskie czy jakieś inne konkretne kryterium wyróżnienia tej klasy zdań).

I

Kryterium wyróżniania klasy zdań atomowych najczęściej ma charakter epistemologiczny lub logiczny. Zgodnie z kryterium epistemologicznym, zdaniami atomowymi są takie zdania, które mogą być uzasadnione lub obalone w sposób pewny, bezpośredni i — co więcej — służą jako podstawa uzasadniania lub obalania wszystkich innych zdań. Np. według neopozytywistów takimi zdaniami są zdania będące sprawozdaniami z bezpośrednich danych zmysłowych, czyli zdania o strukturze $P(a)$, gdzie a jest nazwą indywidualną, a P oznacza własność poznawalną zmysłowo. Zgodnie z kryterium logicznym, zdaniami atomowymi są takie zdania, których struktura nie jest już logicznie analizowalna (a więc nie zawierają one spójników logicznych ani zmiennych związanych kwantyfikatorem) lub takie, których wartościowanie przesądza o wartościowaniu wszystkich innych zdań danego języka¹.

* Praca przygotowana w ramach projektu badawczego KBN nr 1H01A01116.

¹ Te dwa warianty kryterium logicznego są tożsame w językach zawierających wyłącznie spójniki prawdziwościowe. W języku logiki modalnej zdaniami nieanalizowalnymi logicznie są zdania typu p , q itd. natomiast wartościowanie na tych zdaniach nie wyznacza jednoznacznie wartościowania na pozostałych formułach tego języka — w szczególności nie wyznacza np. wartościowania na formułach $\Box p$, $\Box q$.

Bez względu na to, jakie przyjmujemy kryterium² wydaje się, że zdaniom atomowym przypisuje się dwie podstawowe własności³:

- 1) niezależność;
- 2) wyznaczanie wartości logicznych innych zdań z danego języka⁴.

Naszym zadaniem będzie uściślenie tych własności i pokazanie, z jakimi innymi założeniami dotyczącymi języka, logiki i semantyki dla tego języka, własności te są związane.

I.1. Niezależność zdań atomowych

Zdania atomowe powinny być niezależne, tzn. nie powinny między nimi zachodzić żadne związki logiczne. Tak jest ze względu na kryterium epistemologiczne⁵, ponieważ zdania atomowe są uzasadnialne lub obalalne bezpośrednio, a nie przez związki logiczne z innymi zdaniami, które zależą w sposób istotny od przyjętej logiki i są — przynajmniej do pewnego stopnia — sprawą konwencji. Ze względu na kryterium logiczne, niezależność zdań atomowych wynika z ich logicznej prostoty — są to z definicji te zdania, na których dopuszczalne są wszystkie możliwe wartościowania. Niezależność zdań atomowych może być

² Oprócz wymienionych w tekście kryteriów, można również przyjąć kryterium ontologiczne lub semantyczne bycia zdaniem atomowym. Zgodnie z kryterium ontologicznym, zdaniami atomowymi są te zdania, których korelatami ontologicznymi są sytuacje elementarne. Pojęciami pierwotnymi przy tak sformułowanym kryterium są pojęcia sytuacji elementarnej i funkcji prowadzącej ze zbioru zdań w zbiór ich korelatów ontologicznych. Zgodnie z kryterium semantycznym, zdaniami atomowymi są te zdania, których korelacja z opisywaną rzeczywistością jest szczególnie prosta. Takie kryterium bycia zdaniem elementarnym przyjmował Wittgenstein w *Traktacie* (por. [WOLNIEWICZ 1968] s.106).

³ Oprócz własności wymienionych niżej, czasami mówi się, że zdania atomowe są syntaktycznie proste. Własność ta nie jest jednak powszechnie uznawana i — co więcej, jak pokazują późniejsze rozważania — zdarza się, że zdania atomowe jej nie posiadają.

To, że zdaniom atomowym przypisuje się właśnie takie własności, znajduje swój dobitny wyraz w następujących tezach *Traktatu* Wittgensteina (autor używa pojęcia „zdanie elementarne”, a nie „zdanie atomowe”):

4.211. Jest oznaką zdania elementarnego, że żadne zdanie elementarne nie może być z nim sprzeczne.

4.26. Podanie wszystkich prawdziwych zdań elementarnych opisuje świat całkowicie. Świat jest całkowicie opisany przez podanie wszystkich zdań elementarnych wraz ze wskazaniem, które z nich są prawdziwe, a które fałszywe.

4.51. Przypuśćmy, że dane są wszystkie zdania elementarne. Można wtedy po prostu zapytać: jakie zdania da się z nich utworzyć? I to są wszystkie zdania i tak są ograniczone.

4.52. Zdania są wszystkim, co wynika z ogółu zdań elementarnych.

5.134. Ze zdania elementarnego nie da się wywnioskować żadnego innego zdania [elementarnego].

⁵ Argumentem natury historycznej na to, że zdania atomowe w sensie kryterium epistemologicznego powinny być niezależne, jest fakt, że neopozytywiści bardzo chętnie zgadzali się ze wszystkimi tezami *Traktatu* Wittgensteina dotyczącymi zdań elementarnych, utożsamiając te zdania właśnie ze zdaniami bazowymi.

rozumiana syntaktycznie (definicja 1.a) bądź semantycznie (definicja 1.b). Jeżeli logika, jaka obowiązuje w danym języku, ma własność pełności, to rozumienia te są równoważne. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że logika jest pełna i posługiwać się tylko semantycznym rozumieniem niezależności. Zauważmy, że przy obu interpretacjach niezależność nie jest cechą pojedynczego zdania, ale całego zbioru zdań, stąd będziemy definiować nie tyle, co to znaczy, że pewne dwa zdania są niezależne, ale co to znaczy, że pewien zbiór zdań jest zbiorem zdań niezależnych.

DEFINICJA 1.a)

Zbiór zdań A jest zbiorem zdań niezależnych wtw $\forall \alpha \in A$ α jest niesprzeczne z $\{A - \alpha\}$ i $\sim\alpha$ jest niesprzeczne z $\{A - \alpha\}$.

Formalnym odpowiednikiem pojęcia niesprzeczności jest pojęcie Cn -niesprzeczności, czyli niesprzeczności ze względu na daną logikę. Aby więc pojęcie niezależności nabrało ścisłego charakteru, musimy posłużyć się pojęciem języka sformalizowanego J (i zdefiniowanego w tym języku zbioru formuł FOR) oraz pojęciem logiki, reprezentowanej przez operację konsekwencji Cn określonej na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru FOR . Wtedy definicja (1.a) ma postać:

DEFINICJA 1

Zbiór zdań A jest zbiorem zdań niezależnych wtw $\forall \alpha \in A$ $Cn(\{\alpha\} \cup \{A - \alpha\}) \neq FOR$ i $Cn(\{\sim\alpha\} \cup \{A - \alpha\}) \neq FOR$.

Semantyczne rozumienie niezależności znajduje dobrą egzemplifikację w tezie 1.21 *Traktatu* Wittgensteina:

1.21. Jedno może być faktem lub nie być, a wszystko inne pozostawać takie samo.

Takie rozumienie niezależności pozwala na sformułowanie następującej definicji:

DEFINICJA 1.b)

Zbiór zdań A jest zbiorem zdań niezależnych wtw $\forall \alpha \in A$ istnieje świat, w którym prawdziwe jest $\{\alpha\} \cup \{A - \alpha\}$ i istnieje świat, w którym prawdziwe jest $\{\sim\alpha\} \cup \{A - \alpha\}$.

Formalnym odpowiednikiem pojęcia świata jest pojęcie modelu lub pojęcie teorii zupełnej (czyli jednoznacznego opisu świata — zbioru wszystkich zdań prawdziwych w danym modelu). Uściślenie tej definicji otrzymujemy definiując klasę modeli M dla danego języka sformalizowanego J lub klasę teorii zupełnych T . Te dwie klasy są — przy pewnym uproszczeniu — wzajemnie definiowalne. Dwa modele opisywane przez tę samą teorię zupełną są elementarnie nieodróżnialne (na gruncie danego języka J), co intuicyjnie możemy rozumieć w ten sposób, że z punktu widzenia języka J są one nierozróżnialne — są w nich prawdziwe dokładnie te same zdania języka J . Nie oznacza to wcale, że są one

identyczne czy nawet izomorficzne. Dla potrzeb tego artykułu będziemy jednak utożsamiać ze sobą modele elementarnie nieodróżnialne — podzielimy więc klasę wszystkich modeli danego języka przez relację $\equiv$ elementarnej nieodróżnialności. Klasa wszystkich modeli ze zbioru $\mathbf{M}/\equiv$ jest w sposób jednoznaczny wyznaczona przez klasę wszystkich teorii zupełnych dla danej pary $\langle J, Cn \rangle$. W dalszym ciągu będziemy więc mówić nie o klasie modeli $\mathbf{M}/\equiv$, a o zbiorze teorii zupełnych $\mathbf{T}$, czyli o zbiorze wszystkich opisów w języku J modeli z tej klasy. Przy tych ustaleniach definicja (1.b) ma postać:

DEFINICJA 2

Zbiór zdań A jest zbiorem zdań niezależnych wtw $\forall \alpha \in A \exists T_1 \in \mathbf{T} \exists T_2 \in \mathbf{T} (\{\alpha\} \cup \{A - \alpha\}) \subseteq T_1$ i $(\{\sim\alpha\} \cup \{A - \alpha\}) \subseteq T_2$.

Definicja ta pokazuje, że pojęcie niezależności — a więc i pojęcie zdania atomowego — jest zrelatywizowane do klasy teorii $\mathbf{T}$ dla danej pary $\langle J, Cn \rangle$. Klasa $\mathbf{T}$ może być klasą wszystkich teorii zupełnych w logice Cn określonej w tym języku lub pewnym podzbiorem tej klasy, wyróżnionym ze względu na jakieś dodatkowe kryteria⁶.

Wolniewicz [WOLNIEWICZ 1968] nazywa zdefiniowane wyżej pojęcie niezależności „niezależnością słabą” i stwierdza, że tak rozumie się niezależność w badaniach nad systemami dedukcyjnymi⁷. Pojęcie to można wzmocnić i mówić o „niezależności mocnej” zdefiniowanej w następujący sposób:

DEFINICJA 3

Zbiór zdań A jest mocno niezależny wtw $\forall X \subseteq A \exists T \in \mathbf{T} (\{\sim\alpha: \alpha \in X\} \cup \{\alpha: \alpha \in A - X\}) \subseteq T$.

W szczególności, zgodnie z tą definicją, jeśli zbiór zdań atomowych jest mocno niezależny, to jest niesprzeczny (przypadek, gdy $X = \emptyset$) i — w przypadku, gdy $X = A$ — istnieje świat, w którym fałszywe są wszystkie zdania atomowe.

⁶ Ponieważ nie chcemy z góry rozstrzygać, czy $\mathbf{T}$ jest klasą wszystkich, czy tylko niektórych teorii zupełnych, więc definiujemy pojęcie konsekwencji Cn i zbiór $\mathbf{T}$ niezależnie od siebie. Innym rozwiązaniem — zastosowanym np. w [SUSZKO 1967] jest przyjęcie, jako pojęcia podstawowego, pewnego zbioru formuł Aks — nazywanego zbiorem aksjomatów — w danym języku J . Za pomocą tego zbioru wyznaczona zostaje klasa modeli $\mathbf{M}$ (będących modelami dla języka J takimi, że $\forall M \in \mathbf{M} Aks \subseteq Ver(M)$), gdzie $Ver(M)$ jest zbiorem wszystkich zdań prawdziwych w modelu M), a następnie zdefiniowana jest operacja konsekwencji jako operacja wyznaczona przez tę klasę: $\alpha \in Cn(X)$ wtw $\forall M \in \mathbf{M}$ jeśli $X \subseteq Ver(M)$, to $\alpha \in Ver(M)$.

⁷ Np. badając niezależność hipotezy *continuum* od reszty aksjomatów teorii mnogości konstruuje się model dla teorii mnogości, w którym spełniona jest hipoteza *continuum* i taki model dla teorii mnogości, w którym spełniona jest negacja hipotezy *continuum*.

Oczywiście, jeśli zbiór jest mocno niezależny, to jest też słabo niezależny, ale nie odwrotnie⁸.

Powyższą definicję mocnej niezależności można sformułować w nieco odmienniej postaci posługując się pojęciami modalnymi (por. np. [SUSZKO 1968] s. 212). Jeśli dodatkowo przyjmiemy naturalny związek między pojęciem możliwości a klasą teorii zupełnych $\mathbf{T}$:

$$\Diamond\alpha =_{\text{def}} \exists T \in \mathbf{T} \alpha \in T,$$

to definicja ta ma postać:

DEFINICJA 4

Zbiór A jest niezależny wtw $\forall X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq A \exists T_1 \in \mathbf{T} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in T_1$ i $\exists T_2 \in \mathbf{T} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \sim\alpha_n) \in T_2$ i $\exists T_3 \in \mathbf{T} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \sim\alpha_{n-1} \wedge \sim\alpha_n) \in T_3$ i ... i $\exists T_2^n \in \mathbf{T} (\sim\alpha_1 \wedge \dots \wedge \sim\alpha_n) \in T_2^n$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

UWAGA

Z powyższych rozważań widać, że atomowość zdań nie ma związku z ich wartością logiczną — w szczególności żadne zdanie atomowe nie może być zawsze prawdziwe. Wynika to wprost z warunku niezależności: gdyby pewne zdanie atomowe α było zawsze prawdziwe, to wynikałoby z każdego innego zdania atomowego, co jest sprzeczne z warunkiem niezależności.

Z tak zdefiniowanym problemem niezależności mocnej wiąże się problem o charakterze metafizycznym. Można, mianowicie, postawić pytanie, czy istnieje taki świat, w którym wszystkie zdania atomowe są fałszywe? Oznaczałoby to, że w tym świecie nie zachodzi żaden pozytywny fakt. Intuicja podpowiada nam, aby taką ewentualność odrzucić. Tak robi np. Suszko [SUSZKO 1968]. Rozwiązanie to ma jednak tę wadę, że jeśli założymy, że w każdym świecie jest prawdziwe przynajmniej jedno zdanie atomowe, to zbiór zdań atomowych A przestaje być zbiorem zdań niezależnych w sensie definicji 3. Zauważmy bowiem, że jeśli $X = A - \{\alpha\}$ i dla pewnej teorii $T \in \mathbf{T} (\sim\beta: \beta \in X) \subseteq T$, to $\alpha \in T$, a więc istnieją związki logiczne między elementami zbioru A .

W cytowanym artykule Suszko z jednej strony formułuje pojęcie niezależności mocnej dla dowolnego skończonego zbioru zdań (definicja 4), a z drugiej strony zakłada, że nie istnieje świat całkowicie negatywny (tzn. świat, w którym fałszywe są wszystkie zdania atomowe), a więc np. jeśli zbiór zdań atomowych składałby się z pięciu elementów: $\{p_1, \dots, p_5\}$, to nie istnieje świat, w którym prawdziwe jest zdanie $\sim p_1 \wedge \dots \wedge \sim p_5$. Widać więc, że definicja niezależności mocnej, założenie o skończoności zbioru zdań atomowych i założenie o nie ist-

⁸ Pytanie o niezależność mocną hipotezy *continuum* od reszty aksjomatów teorii mnogości (por. przypis 7) można by sformułować w ten sposób: czy istnieje model, w którym spełniona jest hipoteza *continuum* i dowolny zbiór zdań będących negacjami aksjomatów teorii mnogości i czy istnieje model, w którym spełniona jest negacja hipotezy *continuum* i dowolny zbiór zdań będących negacjami aksjomatów teorii mnogości. O ile nam wiadomo, problem taki nie był rozważany.

nieniu świata całkowicie negatywnego (w wyżej zdefiniowanym sensie) nie da się pogodzić. Suszko wysnuwa stąd wniosek, że zbiór zdań atomowych nie może być skończony. Alternatywnym rozwiązaniem jest przyjęcie, że istnieje świat całkowicie negatywny.

Podsumowując dotychczasowe rozważania możemy stwierdzić, że aby precyzyjnie sformułować pojęcie niezależności, musimy posłużyć się pojęciami (A) języka sformalizowanego J , (B) logiki określonej w tym języku, reprezentowanej przez operację Cn , (C) klasy teorii zupełnych T zawartej w zbiorze T_{zp} wszystkich teorii zupełnych dla pary $\langle J, Cn \rangle$. Istotne jest również rozstrzygnięcie kwestii metafizycznych: czy istnieje świat, w którym fałszywe są wszystkie zdania atomowe i czy istnieje skończenie, czy nieskończenie wiele zdań atomowych. W zależności od tych rozstrzygnięć należy przyjąć definicję mocną lub słabą niezależności lub — przy przyjęciu definicji niezależności mocnej w postaci definicji 4 — dołączyć warunek o istnieniu nieskończenia wielu zdań atomowych.

Ważnym problemem związanym z niezależnością, którego nie rozstrzygają powyższe definicje, jest problem, czy zawsze (tzn. dla każdego zbioru teorii zupełnych T) istnieje zbiór zdań niezależnych i czy jest on wyznaczony jednoznacznie. Zauważmy, że jeżeli na to ostanie pytanie odpowiemy przecząco, to pojęcie świata negatywnego ulega relatywizacji. Nie można wtedy po prostu mówić o świecie negatywnym, ale jedynie o świecie negatywnym ze względu na dany zbiór zdań atomowych: świat opisywany przez teorię T jest całkowicie negatywny ze względu na dany zbiór zdań atomowych A ztw $A \cap T = \emptyset$.

1.2. Wyznaczanie przez zdania atomowe wartości logicznych pozostałych zdań

Zbiór zdań atomowych ma wyznaczać wartość logiczną pozostałych zdań. Tak jest, ponieważ zdania atomowe mają służyć jako podstawa wszelkiej wiedzy o świecie (zgodnie z kryterium epistemologicznym) lub ponieważ mają pełnić rolę generatorów algebry formuł (zgodnie z kryterium logicznym). Zauważmy, że podobnie jak w warunku (1) wyznaczanie wartości logicznej pozostałych zdań (oczywiście chodzi o zdania nieatomowe) ma być własnością nie tyle pojedynczego zdania atomowego, co całego zbioru zdań atomowych.

To, że wartościowanie określone na danym zbiorze formuł wyznacza jednoznacznie wartościowanie na wszystkich pozostałych formułach danego języka, możemy rozumieć dwojako: mocniej i słabiej:

DEFINICJA 5

Zbiór zdań A wyznacza jednoznacznie wartość logiczną pozostałych zdań ze zbioru FOR wtw $\forall T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ jeśli $T_1 \cap A = T_2 \cap A$, to $T_1 = T_2$ ⁹.

⁹ Taka definicja jest równoważna definicji „standardowej”: Zbiór zdań A wyznacza jednoznacznie wartość logiczną pozostałych zdań ze zbioru FOR wtw $\forall f_1, f_2 \in \mathbf{Int} \forall a \in A$

Jest to formalizacja intuicji, że aby otrzymać jednoznaczny opis świata, wystarczy wiedzieć, jakie zdania atomowe są prawdziwe w tym świecie — jeżeli w dwóch światach prawdziwe są dokładnie te same zdania atomowe, to jest to faktycznie jeden świat. W szczególności wynika stąd, że świat całkowicie negatywny ze względu na dany zbiór A (tzn. taki, w którym wszystkie zdania atomowe ze zbioru A są fałszywe) — o ile istnieje — jest dokładnie jeden.

DEFINICJA 6

Zbiór zdań A wyznacza jednoznacznie wartość logiczną pozostałych zdań ze zbioru FOR wtw $\forall T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ jeśli $A \subseteq T_1$ i $A \subseteq T_2$, to $T_1 = T_2$.

Zgodnie z tą definicją, świat, w którym prawdziwy jest dany zbiór zdań atomowych jest wyznaczony jednoznacznie. Nie wynika z niej, że jeśli istnieje świat, w którym wszystkie zdania atomowe (z danego zbioru A) są fałszywe, to jest on dokładnie jeden (por. niżej, przykład 3).

Definicja 5 jest silniejsza niż definicja 6, co pokazuje np. przykład 2 (por. niżej).

II

Założmy, że mamy ustalony język i logikę w tym języku, a więc, że dana jest para $\langle J, Cn \rangle$. Niech A będzie zbiorem zdań atomowych mających własność (1) i (2) w sensie pewnej kombinacji definicji 2–6. W dalszym ciągu artykułu będziemy się starali odpowiedzieć na pytanie, jak — w zależności od rodziny $\mathbf{T}$ — można zdefiniować zbiór A ?

II.1. Przypadek najprostszy: $\mathbf{T} = \mathbf{Tzpl}$.

Założmy, że zbiór $\mathbf{T}$ jest zbiorem wszystkich teorii zupełnych: $\mathbf{T} = \mathbf{Tzpl}$. Jest on więc jednoznacznie wyznaczony przez parę $\langle J, Cn \rangle$. Przyjmijmy dodatkowo, że język J jest językiem zdaniowym i wszystkie funktory występujące w tym języku są funktorami prawdziwościowymi. Aby scharakteryzować zbiór A zdań atomowych wystarczy wtedy założyć, że $A = At$, gdzie At jest zbiorem zmiennych zdaniowych. Taki zbiór spełnia nałożone na niego warunki:

Zbiór At spełnia warunek (1) w sensie definicji 2, 3 i 4, tzn. jest mocno niezależny, ponieważ każde wartościowanie na zbiorze $A = At$ rozszerza się do pewnego wartościowania na zbiorze wszystkich formuł języka J , a każde takie wartościowanie wyznacza z kolei teorię zupełną.

Zbiór At spełnia warunek (2) w sensie definicji 5 i 6, ponieważ każde wartościowanie na zbiorze $A = At$ rozszerza się jednoznacznie do wartościowania na zbiorze wszystkich formuł języka J , tzn. każde wartościowanie wyznacza dokładnie jedną teorię zupełną.

jeśli $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, to $\forall \beta \in FOR f_1(\beta) = f_2(\beta)$, gdzie $\mathbf{Int}$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f: FOR \rightarrow \{0,1\}$, będących interpretacjami danego języka J , o ile przyjmujemy, że $\mathbf{T}$ jest zbiorem wszystkich teorii zupełnych dla danej pary $\langle J, Cn \rangle$.

Rozwiązanie to ma ograniczony zasięg, bo dotyczy tylko języków zdaniowych ze spójnikami prawdziwościowymi. W zdaniowej logice modalnej zbiór $A = At$ nie ma własności wyznaczania wartości wszystkich pozostałych zdań z tego języka ani w sensie definicji 5, ani w sensie definicji 6 (por. przykład z przypisu 1). Można również bronić tezy, że w klasycznej logice pierwszego rzędu zbiór $A = At$ nie ma własności opisywanych przez definicję 5 lub 6, ponieważ wartościowanie na zdaniach typu $P(a_i)$ nie zawsze rozstrzyga w sposób jednoznaczny wartość logiczną zdania $\forall x P(x)$. Ma ono również tę zasadniczą wadę, że nie bierze pod uwagę specyfiki języka naturalnego, polegającej na tym, że często zdania wzajemnie sprzeczne czy wykluczające się (a więc nie będące zdaniami niezależnymi) mogą mieć równie prostą budowę syntaktyczną. Pokazuje to następujący przykład:

PRZYKŁAD 1

Rozważmy trzy zdania: „ $a < 5$ ”, „ $a > 5$ ”, „ $a = 5$ ”. Zdania te wzajemnie się wykluczają, a w sumie dopełniają.

Z syntaktycznego punktu widzenia nie ma powodu, aby któreś ze zdań w powyższym przykładzie wyróżnić — wszystkie wydają się być zdaniami prostymi. Nie spełniają one jednak warunku niezależności: z tego, że prawdziwe jest jedno z nich, wynika, że fałszywe są pozostałe. Widać stąd, że zachowanie utożsamienia $A = At$, a więc jednoczesne spełnienie warunku syntaktycznej prostoty i niezależności, jest w języku naturalnym trudne, o ile nie przyjmie się pewnych arbitralnych założeń (np. takich, że zdanie „ $a < 5$ ” jest identyczne numerycznie ze zdaniem „nieprawda, że $a \geq 5$ ”, albo że zdanie „ $a = 5$ ” jest numerycznie identyczne ze zdaniem „ $\neg a < 5 \wedge \neg a > 5$ ” itp.). Zarzut ten jest o tyle istotny, że potrzeba wyróżnienia klasy zdań atomowych powstała w związku z językiem naturalnym, a nie z jakimś abstrakcyjnym językiem formalnym, w którym dokonuje się pewnych umownych rozstrzygnięć nie wymagających dalszego uzasadnienia.

Podsumowując — nawet jeśli przyjmujemy, że można jakoś niearbitralnie wśród zdań wykluczających się o podobnej strukturze syntaktycznej wyróżnić zdania atomowe, to najprostszy przypadek — czyli taki, w którym o istnieniu świata decyduje jego niesprzeczność logiczna i nie ma zdań nie będących tezami logiki, które są prawdziwe we wszystkich światach (a więc nie ma praw fizyki, techniki itp.) — nie jest zgodny z praktyką języka naturalnego i teorii budowanych w tym języku. Jednak właśnie na tym gruncie powstała potrzeba wyróżnienia zdań atomowych. Stąd — dla potrzeb języka naturalnego — rozstrzygnięcie, że $A = At$ wydaje się niezadowolające.

II.2. Przypadek ogólny: $T \neq \text{Zpl}$

O zbiorze teorii zupełnych T zakładamy jedynie, że $T \neq \emptyset$ ¹⁰. Aby otrzymać ogólniejszą definicję zbioru zdań atomowych założymy jeszcze, że

$$\cap T \supseteq \text{Cn}(\emptyset) \text{ i } \cap T \neq \text{Cn}(\emptyset).$$

Takie założenie oznacza, że istnieją zdania nie będące tezami logiki, które należą do wszystkich teorii zupełnych z wyróżnionej klasy T . Innymi słowy, na klasę teorii zupełnych T oprócz warunku logicznej niesprzeczności nakładamy jakieś warunki dodatkowe (które możemy interpretować np. jako warunki niesprzeczności fizycznej czy technicznej). Zbiór zdań X taki, że $X = \cap T - \text{Cn}(\emptyset)$ będziemy nazywać „zbiorem zdań syntetycznych *a priori*” (por. [OMYŁA 1986], s. 98, [WOLNIEWICZ 1999] s. 150) i oznaczać przez SAP .

FAKT I

Niech dana będzie para $\langle J, \text{Cn} \rangle$.

1.1) $\cap T = \text{Cn}(\emptyset)$ wtw $SAP = \emptyset$;

1.2) jeśli $\cap T \neq \text{Cn}(\emptyset)$, to $T \neq \text{Zpl}$.

Stajemy teraz przed następującym problemem: jak mając trójkę $\langle J, \text{Cn}, T \rangle$ wyznaczyć zbiór zdań atomowych spełniający nakładane na niego — w postaci pewnej kombinacji definicji 2–6 — warunki? Procedura taka będzie składała się z trzech etapów. Najpierw zdefiniujemy rodzinę D wszystkich wymiarów logicznych ze względu na dany zbiór teorii zupełnych T . Następnie wśród wymiarów logicznych wyróżnimy rodzinę D_0 wymiarów atomowych. Ostatecznie utożsamimy zbiór zdań atomowych A z selektorem rodziny wymiarów atomowych.

II.2.a. Rodzina D wszystkich wymiarów logicznych

Za pomocą zbioru T można zdefiniować rodzinę D zbiorów zdań (jest to zdaniowy odpowiednik przestrzeni Q u Wolniewicza, por. [WOLNIEWICZ 1999] s. 37), nazywaną rodziną wymiarów logicznych. Wedle intuicji, elementami tej rodziny są zbiory zdań mających tę własność, że dla dowolnej teorii zupełniej dokładnie jedno ze zdań z danego zbioru należy do tej teorii i każde ze zdań z danego zbioru należy przynajmniej do jednej teorii zupełnej. Najprostszy przykładem zbioru należącego do tej rodziny, tłumaczącym również przyjęcie nazwy „wymiar”, jest zbiór zdań, z których każde przypisuje określonemu obiektowi pewne wymiary, np. wagę.

¹⁰ Jest to odpowiednik aksjomatu R2 u Wolniewicza (por. np. [WOLNIEWICZ 1999], s. 138), mówiącego, że istnieje przynajmniej jeden możliwy świat. Pozostałe aksjomaty przyjęte przez Wolniewicza (R1, R3, R4, R5) wynikają z tego, że elementami zbioru T są teorie zupełne:

(R1) $T \subseteq P(\text{FOR})$, z definicji teorii jako zbioru formuł;

(R3) $\cup T \neq \text{FOR}$, z faktu, że kontrtautologie nie są elementami żadnej teorii zupełnej;

(R4) $\cap T \neq \emptyset$, z faktu, że tautologie są elementami wszystkich teorii zupełnych;

(R5) $\forall T, T' (T \subseteq T') \rightarrow (T = T')$, z definicji teorii zupełnej jako teorii maksymalnej niesprzecznej.

DEFINICJA 7

Rodzinę zbiorów zdań **D** nazywamy rodziną wymiarów logicznych ze względu na zbiór teorii zupełnych **T** zawsze i tylko, gdy:

a) $\forall D \in \mathbf{D} \ D \cap (\cap \mathbf{T}) = \emptyset$ i $D \cap (\text{FOR} - \cup \mathbf{T}) = \emptyset$ (tzn. wymiary nie zawierają ani zdań prawdziwych we wszystkich teoriach ze zbioru **T**, ani fałszywych we wszystkich teoriach ze zbioru **T**;

b) $\forall D \in \mathbf{D} \ \forall T \in \mathbf{T} \ \text{card}(T \cap D) = 1$, tzn. przecięcie dowolnego wymiaru z dowolną teorią ze zbioru **T** jest zawsze jednoelementowe.

Wprost z powyższej definicji wynikają następujące fakty:

FAKT 2

$\forall D \in \mathbf{D} \ \forall \alpha \in D \ \exists T \in \mathbf{T} \ \alpha \in T$ — tzn. każde zdanie z dowolnego wymiaru należy przynajmniej do jednej teorii ze zbioru **T**.

FAKT 3

3.1) $\forall D \in \mathbf{D} \ \text{card}(D) \geq 2$ — tzn. każdy element **D** (każdy wymiar) jest przynajmniej dwuelementowy;

3.2) $\forall D \in \mathbf{D} \ \text{card}(\mathbf{T}) \geq \text{card}(D)$ — tzn. w każdy wymiar ma co najwyżej tyle elementów, co zbiór teorii zupełnych **T**;

FAKT 4

Jeżeli założymy, że nie ma świata całkowicie negatywnego i $\cap \mathbf{T} = Cn(\emptyset)$ (czyli — w świetle faktu 1 — jeśli nie ma zdań syntetycznych *a priori*) i $Cn = Cn_{KRZ}$, to

4.1) istnieje wymiar mający nieskończenie wiele elementów (jest to wymiar następującej postaci: $D = \{p_1, \neg p_1 \wedge p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3, \dots\}$)

4.2) rodzina **D** jest nieskończona — nieprzeliczalna. Wynika to stąd, że wymiarów, takich jak ten opisany w 4.1, jest nieprzeliczalnie wiele — jest ich tyle, ile funkcji $f: At \rightarrow \{0, 1\}$.

II.2.b. Rodzina **D₀** wymiarów atomowych

Wśród zbioru wszystkich wymiarów logicznych chcemy teraz wyróżnić wymiary najprostsze, które będziemy nazywać wymiarami atomowymi. W tym celu zdefiniujemy na zbiorze wszystkich wymiarów logicznych porządek $<$. Aby to zrobić, wprowadzimy najpierw kilka definicji pomocniczych.

Niech $D_i, D_j \in \mathbf{D}$, gdzie $D_i = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots\}$, $D_j = \{\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots\}$.

DEFINICJA 8 (iloczynu wymiarów)

Przez $D_i \times D_j$ będziemy oznaczać zbiór postaci: $\{\alpha_{i1} \wedge \beta_{j1}, \alpha_{i2} \wedge \beta_{j1}, \alpha_{i1} \wedge \beta_{j2}, \alpha_{i1} \wedge \beta_{j3}, \dots\}$. Jeśli $\text{card}(D_i) = n$ i $\text{card}(D_j) = k$, to $\text{card}(D_i \times D_j) = nk$.

PRZYKŁAD

Niech $D_1 = \{p, \neg p\}$, $D_2 = \{q, \neg q\}$. Wtedy $D_1 \times D_2 = \{p \wedge q, \neg p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge \neg q\}$

DEFINICJA 9 (ortogonalności wymiarów ze względu na daną rodzinę $\mathbf{D}$)

Dwa wymiary D_i i D_j są ortogonalne wtw $D_i \times D_j \in \mathbf{D}$ ¹¹.

PRZYKŁAD

Jeśli $\mathbf{T} = \mathbf{Tzpl}$, to wymiary $D_1 = \{p, \sim p\}$ i $D_2 = \{q, \sim q\}$ są ortogonalne, natomiast wymiar D_1 nie jest ortogonalny z wymiarem $D_1 \times D_2$, ponieważ np. zdanie $p \wedge q \wedge \sim p$ jest wewnętrznym sprzeczne, a więc nie należy do żadnej teorii zupełnej.

Można wskazać pewne kryterium ortogonalności wymiarów. Nie ma ono jednak charakteru uniwersalnego — jego stosowalność zależy od tego, jaki jest zbiór $\cap \mathbf{T}$.

FAKT 5

Jeśli $\mathbf{T} = \mathbf{Tzpl}$, to $\forall D_i, D_j \in \mathbf{D}$ jeśli $\text{var}(D_i) \cap \text{var}(D_j) = \emptyset$, to $D_i \times D_j \in \mathbf{D}$. Wymiar ten jest nieskończony zawsze i tylko, gdy nieskończony jest wymiar D_i lub D_j .

Innymi słowy, jeśli nie ma zdań syntetycznych *a priori*, to każda rodzina wymiarów o rozłącznych zmiennych jest ortogonalna¹².

DEFINICJA 10 (równości wymiarów na gruncie danego zbioru zdań X)

Dwa wymiary D_i i D_j są równe na gruncie danego zbioru zdań X (symbolicznie $D_i =_X D_j$) wtw $\forall \alpha \in D_i \exists \beta \in D_j \alpha \leftrightarrow \beta \in X$.

PRZYKŁAD

Niech $\mathbf{T} = \mathbf{Tzpl}$ i niech $X = \text{Cn}(\emptyset)$. Wtedy $\{p \wedge q, \sim p \wedge q, p \wedge \sim q, \sim p \wedge \sim q\} =_X \{\sim(\sim p \wedge \sim q), \sim(p \wedge \sim q), \sim(\sim p \wedge q), \sim(p \wedge q)\}$.

DEFINICJA 11 (porządku na zbiorze wymiarów ze względu na dany zbiór X)

$D_1 <_X D_2$ ztw $\exists D_3 D_1 \times D_3 =_X D_2$

PRZYKŁAD

Niech $X = \text{Cn}(\emptyset)$. Wtedy $\{p, \sim p\} <_X \{p \wedge q, \sim p \wedge q, p \wedge \sim q, \sim p \wedge \sim q\}$.

Zdefiniowana relacja jest asymetryczna i przechodnia. Elementami maksymalnymi są w sensie tego porządku wszystkie wymiary, które nie są ortogonal-

¹¹ Definicja ta jest równoważna definicji tego pojęcia, które można znaleźć u Wolniewicza, np. [WOLNIEWICZ 1985], s. 33.

¹² Warunek, mówiący, że nie ma zdań syntetycznych *a priori*, jest w tym miejscu bardzo istotny. Jego niespełnienie może powodować, że iloczyn dwóch wymiarów o rozłącznych zmiennych nie będzie tworzyć wymiaru, np. negacja pewnego zdania postaci $\alpha_i \wedge \beta_j$ będzie prawdą we wszystkich teoriach ze zbioru $\mathbf{T}$, choć oczywiście nie będzie prawdą logiki. Zauważmy, że jest to równoważne tezie, że $\sim \alpha_i \vee \sim \beta_j \in \cap \mathbf{T}$ i $\text{var}(\alpha_i) \cap \text{var}(\beta_j) = \emptyset$ - a więc, że $\cap \mathbf{T}$ nie jest teorią Hallden-zupełną. Fakt ** można więc wzmocnić do następującej postaci: Jeśli $\cap \mathbf{T}$ jest teorią Hallden-zupełną, to $\forall D_i, D_j \in \mathbf{D}$ jeśli $\text{var}(D_i) \cap \text{var}(D_j) = \emptyset$, to $D_i \times D_j \in \mathbf{D}$.

ne z żadnym innym wymiarem — w szczególności wymiar zdefiniowany w fakcie (4.1). Elementami minimalnymi — wymiary, których elementy nie dadzą się przedstawić w postaci koniunkcji zdań prostszych, a więc w szczególności wymiary postaci $\{\alpha, \sim\alpha\}$: $\alpha \in At$, ale również wymiar zdefiniowany w fakcie (4.1).

Porządek $<$ pozwala nam wśród wymiarów z $\mathbf{D}$ wyróżnić klasę $\mathbf{D}_0$ (nazywaną klasą wymiarów atomowych). Definiujemy ją w następujący sposób:

DEFINICJA 12 (klasy wymiarów atomowych w danej klasie wszystkich wymiarów $\mathbf{D}$)

$\mathbf{D}_0$ jest klasą wymiarów atomowych w danej klasie wszystkich wymiarów $\mathbf{D}$ zawsze i tylko, gdy $\mathbf{D}_0$ jest zbiorem maksymalnym ze względu na liczbę elementów i maksymalnym w sensie $\subseteq$, spełniającym warunki:

$$1) \forall D_1, \dots, D_n \in \mathbf{D}_0 \ D_1 \times \dots \times D_n \in \mathbf{D},$$

tzn. dowolny skończony podzbiór¹³ wymiarów z rodziny $\mathbf{D}_0$ jest ortogonalny.

$$2) \text{ jeżeli } D \in \mathbf{D}_0, \text{ to } \sim \exists D_1, D_2 \in \mathbf{D}_0 \ D =_{\cap T} D_1 \times D_2.$$

Innymi słowy, $\mathbf{D}_0$ zawiera wszystkie i tylko elementy minimalne w sensie porządku $<$, które tworzą zbiór wymiarów ortogonalnych i ma maksymalną ilość elementów (wśród innych rodzin o podobnych własnościach).

Miedzy rodziną $\mathbf{D}_0$ i zbiorem zdań syntetycznych *a priori* istnieją następujące związki:

FAKT 6

$SAP = \emptyset$ wtw rodzina wymiarów atomowych $\mathbf{D}_0 = \{\{\alpha, \sim\alpha\}: \alpha \in At\}$.

FAKT 7

7.1) Jeśli rodzina $\mathbf{D}_0$ jest skończona, to $SAP \neq \emptyset$ ¹⁴.

7.2) Jeśli przynajmniej jeden element rodziny $\mathbf{D}_0$ jest więcej niż dwuelementowy, to $SAP \neq \emptyset$.

Istnieją również zależności między liczebnością zbioru wymiarów atomowych a liczebnością zbioru $\mathbf{T}$. Związki te charakteryzuje poniższy fakt.

FAKT 8

$$8.1) \forall D \in \mathbf{D}_0 \ \text{card}(\mathbf{T}) \geq \text{card}(D);$$

$$8.2) \text{ Jeśli } \text{card}(\mathbf{T}) = n \text{ i } \text{card}(\mathbf{D}_0) = m \geq 2, \text{ to } \text{card}(D) \leq n/2^{m-1}.$$

¹³ Warunek skończoności jest tu konieczny, ponieważ elementami wymiaru, będącego produktem innych wymiarów, jest — z definicji — pewna koniunkcja, a ta musi być skończona. Ortogonalności dowolnego skończonego podzbioru wymiarów powinna — ze względu na twierdzenie zbliżone do twierdzenia o zwartości — zapewnić ortogonalność całego zbioru.

¹⁴ Z faktu tego wynika, że w ontologii, o której mówi Wolniewicz [WOLNIEWICZ 1985] muszą być — wbrew zamierzeniom autora — prawdziwe pewne zdania syntetyczne *a priori*.

II.2.c. Selektor rodziny wymiarów atomowych — zbiór zdań atomowych

DEFINICJA 13 (selektoru danego zbioru wymiarów $\mathbf{D}$)

Zbiór $\text{Sel}(\mathbf{D})$ jest selektorem danego zbioru wymiarów $\mathbf{D}$ ztw $\text{Sel}(\mathbf{D}) \subseteq \cup \mathbf{D}$ i $\forall D \in \mathbf{D} \text{ card}(D \cap \text{Sel}(\mathbf{D})) = 1$.

Selektorem danego zbioru wymiarów jest więc zbiór zdań mający z każdym wymiarem z danego zbioru dokładnie jeden element wspólny.

Zbiór wszystkich selektorów danego zbioru wymiarów $\mathbf{D}$ będziemy oznaczać przez $\text{Sel}(\mathbf{D})$. Moc tego zbioru zależy od mocy zbioru wymiarów atomowych $\mathbf{D}_0$ i od mocy jego elementów. Zależności te pokazuje poniższy fakt.

FAKT 9

Niech dana będzie rodzina wymiarów atomowych $\mathbf{D}_0$.

9.1) Jeśli $\text{card}(\mathbf{D}_0) = \infty$ lub $\exists D \in \mathbf{D}_0 \text{ card}(D) = \infty$, to $\text{card}(\text{Sel}(\mathbf{D}_0)) = \infty$.

9.2) Jeśli $\text{card}(\mathbf{D}_0) = k$ i $\forall D_i \in \mathbf{D}_0 \text{ card}(D_i) = n_i$, to $\text{card}(\text{Sel}(\mathbf{D}_0)) = n_1 \times \dots \times n_k$.

Niech dana będzie rodzina $\mathbf{D}_0$ wymiarów atomowych. Prawdziwe są następujące fakty:

FAKT 10

Dowolny zbiór $\text{Sel}(\mathbf{D}_0)$ jest maksymalnym zbiorem zdań niezależnych.

FAKT 11

Dla dowolnego $\text{Sel}(\mathbf{D}_0)$ i dla dowolnej $T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ jeśli $\text{Sel}(\mathbf{D}_0) \subseteq T_1$ i $\text{Sel}(\mathbf{D}_0) \subseteq T_2$, to $T_1 = T_2$.

Powyższe dwa fakty świadczą o tym, że dowolny selektor rodziny wymiarów atomowych ma takie własności, jakie powinien mieć zbiór zdań atomowych — jest maksymalnym zbiorem niezależnym w sensie definicji 3 i wyznacza wartość logiczną pozostałych zdań ze zbioru *FOR* przynajmniej w sensie definicji 6. To upoważnia nas do wprowadzenia podstawowej dla całego artykułu definicji:

DEFINICJA 14 (zbioru zdań atomowych dla danego zbioru $\mathbf{T}$)

Zbiorem zdań atomowych A jest dowolny selektor rodziny $\mathbf{D}_0$ wymiarów atomowych w klasie wszystkich wymiarów $\mathbf{D}$.

PRZYKŁAD 2

Rozważmy język, w którym występuje jeden dwuargumentowy predykat pozalogiczny „bycie przed” i trzy jednoargumentowe predykaty pozalogiczne „bycie białym”, „bycie niebieskim” i „bycie czarnym”, a także dwie nazwy indywidualowe „X” i „Y”. Język ten opisuje świat składający się z dwóch przedmiotów X i Y, które umieszczone są liniowo jeden za drugim i z których każdy może mieć jeden z trzech kolorów: biały, niebieski, czarny. Całkowity opis tego świata zawiera jedno zdanie na temat wzajemnego położenia przedmiotów X i Y

i po jednym zdaniu na temat ich kolorów. Z czysto syntaktycznego punktu widzenia, zdaniami atomowymi w tym języku są następujące zdania: *X* jest przed *Y*, *Y* jest przed *X*, *X* jest białe, *X* jest niebieskie, *X* jest czarne, *Y* jest białe, *Y* jest niebieskie, *Y* jest czarne. Możemy teraz przyjąć jedno z dwóch możliwych rozwiązań, odpowiadających przypadkom rozważanym odpowiednio w częściach II.1 i II.2:

1) Możemy założyć, że jedynym warunkiem istnienia tego świata jest jego logiczna niesprzeczność, a więc — równoważnie — że nie ma zdań syntetycznych *a priori* lub, że $T = Tzpl$ (por. fakt 1). W szczególności oznacza to, że w świecie takim może być zarazem prawdziwe zdanie „*X* jest białe” i zdanie „*X* jest czarne”. Tylko przy takim założeniu wszystkie wymienione wyżej syntaktycznie proste zdania są zdaniami atomowymi (jest to więc przypadek, gdy $A = At$). Widać jednak, że rozwiązanie takie jest nieintuicyjne.

2) Możemy założyć, że dla dowolnych przedmiotów $x, y \in \{X, Y\}$ we wszystkich światach prawdziwe są następujące alternatywy rozłączne:

x jest przed *y* lub *y* jest przed *x*;

x jest białe lub *x* jest niebieskie lub *x* jest czarne.

Zdania o takich schematach tworzą zbiór zdań syntetycznych *a priori*, a więc definiują zbiór **T**. To z kolei pozwala zdefiniować zbiór **D** i wyróżnić w nim zbiór wymiarów atomowych **D**₀: $D_0 = \{\{X \text{ jest przed } Y, Y \text{ jest przed } X\}, \{X \text{ jest białe}, X \text{ jest niebieskie}, X \text{ jest czarne}\}, \{Y \text{ jest białe}, Y \text{ jest niebieskie}, Y \text{ jest czarne}\}\}^{15}$.

Zbiór **SEL(D**₀) wszystkich selektorów tego zbioru ma postać:

SEL(D₀) = $\{\{X \text{ jest przed } Y, X \text{ jest białe}, Y \text{ jest białe}\}, \{X \text{ jest przed } Y, X \text{ jest niebieskie}, Y \text{ jest białe}, Y \text{ jest niebieskie}\}, \text{ itd.}\}$ — ogólnie jest to zbiór składający się z 18 trzelementowych zbiorów.

Każdy z tych zbiorów jest maksymalnym zbiorem zdań mocno niezależnym w sensie definicji 3. Żaden z nich nie spełnia definicji 5, ale za to każdy spełnia definicję 6.

PRZYKŁAD 3

Rozważmy język, w którym mamy cztery jednoargumentowe predykaty pozalogiczne: „ciepło”, „zimno”, „jasno”, „ciemno” i jedną nazwę indywiduową „*a*”. Założmy również, że zdaniami syntetycznymi *a priori* są zdania: „*a* jest ciemny wtw *a* nie jest jasny”, „*a* jest zimny wtw *a* nie jest ciepły”. Zgodnie z zaproponowaną definicją 14, zbiorami zdań atomowych są zbiory: $\{a \text{ jest ciemny i } a \text{ jest}$

¹⁵ Zauważmy, że nie jest zbiorem wymiarów atomowych zbiór $D' = \{\{X \text{ jest przed } Y, X \text{ jest za } Y\}, \{Y \text{ jest przed } X, Y \text{ jest za } X\}, \{X \text{ jest białe}, X \text{ jest nie białe}\}, \{X \text{ jest niebieskie}, X \text{ jest nie niebieskie}\}, \{X \text{ jest czarne}, X \text{ jest nie czarne}\}, \{Y \text{ jest białe}, Y \text{ jest nie białe}\}, \{Y \text{ jest niebieskie}, Y \text{ jest nie niebieskie}\}, \{Y \text{ jest czarne}, Y \text{ jest nie czarne}\}\}$, gdyż wymiary te nie są ortogonalne.

ciepły}, {*a* jest ciemny i *a* jest zimny} itd. Zbiory takie są cztery. Każdy z nich jest zbiorem mocno niezależnym (definicja 3) i każdy spełnia definicję 5.

Jeśli natomiast wzbogacimy język o predykat „jest letnio” i przyjmiemy, że we wszystkich teoriach ze zbioru **T** prawdziwe jest zdanie: „*a* jest zimny albo *a* jest letni, albo *a* jest ciepły”, gdzie „albo” jest alternatywą rozłączną, to zbiorów zdań mocno niezależnych jest sześć, ale nie spełniają one definicji 5, a jedynie definicję 6. Rozważmy — w ramach przykładu — zbiór zdań atomowych $A_1 = \{a \text{ jest zimny}, a \text{ jest ciemny}\}$ i dwie teorie zupełne: $T_1 = Cn(a \text{ jest ciepły}, a \text{ jest jasny})$; $T_2 = Cn\{a \text{ jest letni}, a \text{ jest jasny}\}$. Zbiór A_1 nie wyznacza wartości logicznych pozostałych zdań w sensie definicji 5, bo $A_1 \cap T_1 = A_1 \cap T_2 = \emptyset$, ale $T_1 \neq T_2$. Spełnia natomiast definicję 6: jeśli $\forall T_i, T_j A_1 \subseteq T_i$ i $A_1 \cap T_j$, to $T_i = T_j$. Zauważmy też, że ze względu na zbiór zdań atomowych A_1 mogą istnieć dwa światy całkowicie negatywne i istotnie różne — są to światy opisywane przez teorie T_1 i T_2 .

To, czy zbiór zdań atomowych *A* jest wyznaczony jednoznacznie, zależy od tego, ile teorii zupełnych należy do zbioru **T**, a więc — mówiąc nieco metaforycznie — ile jest możliwych światów. Zależność tę widać z poniższego faktu.

FAKT 12

12.1) Jeśli $\mathbf{T} = \{T\}$, to $\mathbf{D}_0 = \emptyset$, a więc $\mathbf{Sel}(\mathbf{D}_0) = \emptyset$, a stąd $A = \emptyset$.

12.2) Jeśli $\mathbf{T} = \{T_1, T_2\}$, to $\text{card}(\mathbf{D}_0) = 1$, a więc $\text{card}(\mathbf{Sel}(\mathbf{D}_0)) = 1$, a stąd zbiór *A* jest wyznaczony jednoznacznie.

Podsumowanie

Na podstawie powyższych rozważań można uzasadnić następujące wnioski o charakterze filozoficznym.

WNIOSEK 1

Pojęcie zdania atomowego jest pojęciem syntaktycznym (tzn. zdanie atomowe można scharakteryzować przez odniesienie do jego budowy, utożsamiając zbiór zdań atomowych *A* ze zbiorem zdań syntaktycznie prostych *At*) tylko w wypadku, gdy spełnione są następujące warunki:

a) język, wśród którego formuł wyróżniamy zdania atomowe, jest językiem zdaniowym zawierającym jedynie spójniki prawdziwościowe;

b) jedynym warunkiem istnienia światów opisywanych przez dany język jest ich niesprzeczność logiczna, co jest równoważne temu, że nie ma zdań prawdziwych we wszystkich światach, które nie byłyby tezami logiki (nie ma zdań syntetycznych *a priori*) — por. fakt 6.

WNIOSEK 2

Jeżeli uznamy, że zbiór zdań atomowych jest charakteryzowany przez definicję 14, to należy uznać, że:

a) istnieje ścisły związek między pojęciami „zdania atomowego”, „zdania syntetycznego *a priori*” i „zbiorem teorii zupełnych” (światów możliwych opisywanych przez dany język) — por. fakty 2, 6, 7 i 8;

b) zbiór zdań atomowych nie jest wyznaczony jednoznacznie; może istnieć wiele różnych zbiorów zdań atomowych — por. przykłady 2 i 3 i fakt 12;

c) jeżeli zbiór zdań atomowych ma własność mocnej niezależności (definicja 3), to nie zawsze wartościowanie na tym zbiorze w sposób jednoznaczny rozszerza się do wartościowania na wszystkich formułach danego języka — por. przykłady 2 i 3.

Bibliografia

- [OMYŁA 1986] M. Omyła, *Zarys logiki niefregowskiej*, PWN, Warszawa.
 [SUSZKO 1967] R. Suszko, *An Essay in the Formal Theory of Extension and Intension*, „*Studia Logica*”, XX, s. 7-36.
 [SUSZKO 1968] R. SUSZKO, *Ontologia w Traktacie L. Wittgensteina*, „*Studia Filozoficzne*”, nr 1, s. 97-121.
 [WOLNIEWICZ 1968] B. Wolniewicz, *Rzeczy i fakty*, PWN, Warszawa.
 [WOLNIEWICZ 1985] B. Wolniewicz, *Ontologia sytuacji*, PWN, Warszawa.
 [WOLNIEWICZ 1999] B. Wolniewicz, *Logic and Metaphysics*, PTS, Warszawa.

A Debate about Atomic Sentences

Set *A* of all atomic propositions in the given language *J* is defined as follows: (1) all elements of *A* are mutually independent, (2) every valuation of set *A* has a unique extension onto the set of all propositions of language *J*. The paper discusses the problem of the existence and the method of constructing set *A*.