

Krzysztof Wójtowicz

Obiekty wyższych rzędów a zobowiązania ontologiczne

1. Wstęp

W pracy *O pojęciu „zobowiązania ontologicznego”* [Wójtowicz 2001] zostało poddane analizie pojęcie „zobowiązania ontologicznego”, sprecyzowane przez Quine’a. W wyniku tej analizy sformułowane zostało uogólnienie kwantyfikatorskiego kryterium istnienia na klasę logik nieelementarnych, będących przedmiotem badań tzw. „abstrakcyjnej teorii modeli” (ATM). Celem niniejszego artykułu jest analiza dwóch pokrewnych zagadnień:

- (i) zobowiązań ontologicznych do obiektów wyższych rzędów;
- (ii) problemu, czym jest własność i jak są identyfikowane własności.

Dla wygody Czytelnika przypomnę tutaj — w skrótovej formie — pewne pojęcia techniczne związane z ATM oraz pewne definicje i wyniki analiz dotyczące związków między ATM i problemem zobowiązań ontologicznych¹.

2. Podstawowe pojęcia ATM

Punktem wyjścia jest klasa klasycznych struktur relacyjnych postaci $M = (U, \{R_i : i \in I\}, \{f_j : j \in J\}, \{a_k : k \in K\})$, gdzie $R_i \subseteq U^n$ — relacje, $f_j : U^m \rightarrow U$ — funkcje, $a_k \in U$ — wyróżnione elementy. Taka klasa struktur $\text{Str}[\tau]$ dana jest dla każdej sygnatury τ . Ta sama klasa struktur jest opisywana „z różnych punktów widzenia”, tj. z punktu widzenia różnych logik abstrakcyjnych, o różnych semantykach, wykorzystujących różne środki wyrażeniowe. Logiki będą traktowane czysto semantycznie — istotna będzie nie ich składnia, ale to, w jakich strukturach prawdziwe są zdania danej logiki L .

Logika L to para $(L, \models_L)$, gdzie L jest odwzorowaniem zdefiniowanym na sygnaturach τ w taki sposób, że $L[\tau]$ jest klasą (jest to klasa L -zdań sygnatury τ),

¹ Pojęcia techniczne dotyczące ATM można znaleźć np. u Ebbinghaus [Ebbinghaus 1985], zaś motywacje i szczegółowe analizy dotyczące związku między ATM i problemem zobowiązań ontologicznych — we wspomnianej mojej pracy [Wójtowicz 2001].

zaś $\models_L$ (relacja L-spełniania) jest relacją między strukturami i L-zdaniami, która spełnia pewne naturalne własności techniczne².

Na logiki nakładane są pewne dalsze warunki, które gwarantują, że rozważane logiki mają siłę wyrażeniową nie mniejszą niż logika elementarna oraz że w tych logikach „modelowane” są terminy logiczne logiki elementarnej:

(i) Własność formuł atomowych: dla wszystkich τ i atomowych formuł $\varphi \in L_{\omega\omega}$ (tj logiki elementarnej) istnieje zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie że $\text{Mod}_{L,\tau}(\psi) = \text{Mod}_{L_{\omega\omega},\tau}(\varphi)$;

(ii) Własność negacji: dla wszystkich τ i wszystkich $\varphi \in L[\tau]$ istnieje zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie, że: $\text{Mod}_{L,\tau}(\psi) = \text{Str}[\tau] \setminus \text{Mod}_{L,\tau}(\varphi)$;

(iii) Własność koniunkcji: dla wszystkich τ i wszystkich $\varphi, \psi \in L[\tau]$ istnieje zdanie $\gamma \in L[\tau]$ takie że $\text{Mod}_{L,\tau}(\gamma) = \text{Mod}_{L,\tau}(\varphi) \cap \text{Mod}_{L,\tau}(\psi)$;

(iv) Własność kwantyfikatora: jeśli c jest stałą, $c \notin \tau$, to dla dowolnego $\varphi \in L[\tau \cup \{c\}]$ istnieje zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie, że dla wszystkich τ -struktur M , $M \models \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(M, a) \models \varphi$ dla pewnego $a \in M$ ³.

Z punktu widzenia problemu zobowiązań ontologicznych, najbardziej istotna jest własność kwantyfikatora. Swobodnie mówiąc, pozwala nam ona „modelować” zdania egzystencjalne (zdanie ψ „odgrywa rolę” zdania $\exists x \varphi(x)$)⁴.

Dla dowolnej logiki L , klasa K modeli nazywa się klasą L -elementarną, jeśli jest zdanie σ logiki L , takie, że $K = \text{Mod}(\sigma)$. Pojęcie klasy elementarnej odgrywa zasadniczą rolę, ponieważ umożliwia nam porównania wyrażeniowej siły logik. Logikę L_2 uznamy za silniejszą od logiki L_1 , jeśli można w niej rozróżnić więcej klas elementarnych. Fakt ten sprecyzowany jest w postaci następującej definicji:

² Te warunki to:

(i) jeśli $\tau \subseteq \sigma$, to $L[\tau] \subseteq L[\sigma]$;

(ii) jeśli $M \models_L \varphi$, to $\varphi \in L[\tau]$ (τ jest sygnaturą struktury M);

(iii) Własność izomorfizmu: Jeśli $M \models_L \varphi$, oraz $M' \cong M$, to $M' \models_L \varphi$;

(iv) Własność reduktu: jeśli $\varphi \in L[\tau]$ oraz $\tau \subseteq \tau_M$, to

$M \models_L \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M|_{\tau} \models_L \varphi$

(v) Własność zmiany nazw (*renaming property*): Niech $\rho: \tau \rightarrow \sigma$ będzie zmianą nazw. Wówczas dla dowolnego $\varphi \in L[\tau]$ istnieje zdanie $\varphi^\rho \in L[\sigma]$, takie że dla wszystkich τ -struktur M :

$M \models_L \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $M^\rho \models_L \varphi^\rho$

Należy zauważyć, że w powyższej definicji mowa jest wyłącznie o zdaniach. Można jednak również zdefiniować pojęcie „formuły ze zmiennymi wolnymi”.

³ Własność formuły atomowej oznacza, że każda z rozważanych logik zawiera formuły o znaczeniu takim, jak elementarne formuły atomowe. Negacja, koniunkcja i kwantyfikator egzystencjalny są „modelowane” za pomocą dopełnień, przecięć i reduktów.

⁴ Heurystycznie (choć niekoniecznie formalnie, ponieważ składnia nie musi być dana *explicite*) nowa stała c odgrywa rolę zmiennej wolnej. Znaczy to, że z punktu widzenia słownika τ bez tej stałej c , zdanie $\varphi(c)$ ma to samo znaczenie, co zdanie $\exists x \varphi(x)$. Jest tak, ponieważ $M \models \exists x \varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $a \in M$, taki, że $(M, a) \models \varphi(c)$.

Def. Powiemy, że logika L_2 jest równie silna jak logika L_1 ($L_1 \leq L_2$), jeśli każda L_1 -elementarna klasa K jest również L_2 -elementarna (każda klasa EC w L_1 jest EC w L_2). L_1 oraz L_2 są równie silnie ($L_1 \equiv L_2$) jeśli zarówno $L_1 \leq L_2$ jak i $L_2 \leq L_1$. L_2 jest silniejsza od L_1 ($L_1 < L_2$) gdy $L_1 \leq L_2$, lecz nie jest prawdą, że $L_1 \equiv L_2$.⁵

Ponieważ w tym ujęciu identyfikujemy znaczenie zdania z klasą jego modeli, więc fakt, iż $L_1 \leq L_2$, oznacza, że dla dowolnego L_1 -zdania σ_1 , istnieje L_2 -zdanie σ_2 o takim samym znaczeniu, jak σ_1 . Znaczenia zdań σ_1 i σ_2 są takie same, pomimo iż — w ogólnym przypadku — semantyki logik L_1 i L_2 zdefiniowane są w różny sposób⁶.

Odnosimy następujące fakty:

1. Logiki abstrakcyjne są interpretowane w takich samych strukturach, w szczególności logika elementarna jest jedną z logik abstrakcyjnych. To umożliwia porównywanie siły wyrażeniowej oraz opis modeli dla dowolnej L_1 -teorii (np. teorii elementarnej) z punktu widzenia logiki L_2 .

2. „Miernikiem” siły wyrażeniowej logiki L jest to, jakie są klasy L -elementarne. Ogólnie: im silniejsza logika, tym „drobniejsze” są klasy elementarne.

3. Logikami abstrakcyjnymi są logiki z dodatkowymi kwantyfikatorami, np. kwantyfikatorami mocy, kwantyfikatorem Changa, Härtiga, Henkina, kwantyfikatorami rozgałęzionymi, kwantyfikatorami podzielności itd., a więc logiki mające naturalne motywacje matematyczne, lingwistyczne i filozoficzne⁷.

4. Siła wyrażeniowa szeregu logik abstrakcyjnych jest większa dzięki bezpośredniemu „wbudowaniu” w semantykę dodatkowych pojęć. Abstrahujemy od aspektów składniowych, istotne są natomiast różnice w warunkach semantycznych.

5. W ujęciu ATM kwantyfikacja jest interpretowana w sposób referencjalny (nie substytucyjny), a więc zgodnie z ujęciem Quine’a.

⁵ Na przykład logika $L(Q_0)$ jest silniejsza od logiki elementarnej $L_{\omega\omega}$, ponieważ klasa struktur nieskończonych jest definiowalna (w pustym słowniku) za pomocą formuły $Q_0x(x=x)$, a nie jest definiowalna żadną formułą języka elementarnego. Jest więc $L(Q_0)$ -elementarna, ale nie $L_{\omega\omega}$ -elementarna.

⁶ Na przykład zdanie języka $L_{\omega_1\omega}$: $\exists^{\geq 1}x(x=x) \wedge \dots \wedge \exists^{\geq n}x(x=x) \wedge \dots$ (nieskończona koniunkcja) ma takie samo znaczenie, jak zdanie $Q_0x(x=x)$ języka $L(Q_0)$, gdyż oba definiują klasę struktur nieskończonych.

⁷ Kwantyfikatory mocy to kwantyfikatory wyrażające fakty dotyczące liczności klasy obiektów spełniających formułę φ : $M \models_{Q_\alpha} x\varphi(x)$ gdy w M istnieje co najmniej $\aleph_\alpha$ obiektów o własności φ . Kwantyfikator Changa wyraża fakt, że moc zbioru obiektów o własności φ jest równa mocy uniwersum. Kwantyfikator Härtiga wiąże dwie formuły φ i ψ , i wyraża fakt, że moc zbioru obiektów spełniających φ jest równa mocy zbioru obiektów spełniających ψ . Kwantyfikatory podzielności D_n wyrażają fakt, że liczba elementów uniwersum spełniających formułę φ jest podzielna przez daną liczbę n . Kwantyfikatory Henkina i kwantyfikatory rozgałęzione zostaną omówione później.

6. Fakt, że dana L-teoria T zobowiązuje się ontologicznie do istnienia obiektu o własności φ oznacza, że $\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\exists x\varphi(x))$. Pojęcie „zdanie egzystencjalnego” jest zadane semantycznie dzięki własności kwantyfikatora. Zobowiązanie ontologiczne L-teorii T polega zatem na egzemplifikacji własności φ , przy czym — w ogólnym wypadku — własność φ nie musi być L-własnością. W szczególności sensowny jest problem analizy zobowiązań ontologicznych L-teorii T z punktu widzenia innej logiki L_2 .

3. Abstrakcyjne sformułowanie kryterium zobowiązań ontologicznych

Rozważmy L_1 -teorię T i logikę L_2 wspólnej sygnatury τ .

DEFINICJA 1. L_1 -zdanie egzystencjalne $\sigma = \exists x\varphi(x)$ jest zobowiązaniem ontologicznym L_1 -teorii T , jeśli $\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\sigma)$ (czyli: każdy model dla T spełnia σ).

DEFINICJA 2. L_2 -zdanie egzystencjalne $\sigma = \exists x\varphi(x)$ jest zobowiązaniem ontologicznym L_1 -teorii T , jeśli $\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\sigma)$ (czyli: każdy model dla T spełnia σ)⁸.

DEFINICJA 3. L_2 -zdanie egzystencjalne $\sigma = \exists x\varphi(x)$ jest zobowiązaniem ontologicznym L_1 -teorii T , relatywnie do klasy modeli K , jeśli $K \cap \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\sigma)$ (czyli: każdy model dla T , należący do klasy K spełnia σ)⁹.

Powyższe definicje wykorzystują fakt, że klasy modeli L_1 -teorii T mogą być opisywane za pomocą środków semantycznych dostępnych w silniejszych logikach. Na L_2 -zobowiązania ontologiczne L_1 -teorii T składają się zatem takie L_2 -własności, które muszą być egzemplifikowane w modelach dla T (tzn. takie L_2 -własności φ , że $\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\exists x\varphi(x))$ ¹⁰). Pojęcie „zobowiązania ontologicznego” jest więc zawsze zrelatywizowane do pewnej logiki i nie ma sensu mówić o „zobowiązaniach w ogóle”.

Własności są własnościami indywiduów; w szczególności powyższe definicje nie mówią nic na temat ewentualnych zobowiązań do istnienia zbiorów, relacji czy funkcji (ogólnie: obiektów wyższych rzędów) o pewnych własnościach. Otwarty pozostaje też problem, o jakich własnościach (egzemplifikowanych w modelach dla T) można — w ogólnym wypadku — mówić i jak rozumiane jest tu pojęcie „własności”. Te zagadnienia są przedmiotem dalszych analiz.

⁸ DEFINICJA 2 stanowi uogólnienie DEFINICJI 1. Wymaga ona założenia, że interesujące poznawczo może być badanie klasy modeli $\text{Mod}(T)$ także z punktu widzenia systemu pojęciowego reprezentowanego w logice L_2 (innej niż logika L_1 w ramach której formułowana jest teoria T). Mówiąc swobodnie, „ L_2 -obserwator” jest lepiej wyposażony, ma silniejsze środki wyrażeniowe i lepiej potrafi opisywać modele dla teorii T .

⁹ Jeśli klasa K jest klasą modeli zamierzonych, to DEFINICJA 3 dotyczy tego, jakie L_2 -własności są egzemplifikowane w zamierzonych modelach dla L_1 -teorii T .

¹⁰ Należy pamiętać o tym, że zapis „ $\exists x\varphi(x)$ ” jest — w ogólnym wypadku — nieformalny i jego sens jest zadany przez własność kwantyfikatora.

4. Zobowiązania do obiektów innych kategorii ontologicznych

4.1. ATM a problem istnienia obiektów wyższych rzędów. W ujęciu ATM mówimy o własnościach indywiduów (i o istnieniu indywiduów o pewnych własnościach). Modele są klasycznymi strukturami relacyjnymi i składają się z indywiduów. To, że można mówić o indywiduach i ich istnieniu, jest możliwe dzięki własności kwantyfikatora — ona zapewnia istnienie semantycznych odpowiedników zdań „istnieje obiekt o własności ϕ ”.

Z podejściem tym wiążą się jednak pewne trudności:

(i) Niekiedy *explicite* formułujemy zdania, wyrażające istnienie funkcji, zbiorów czy relacji, z intencją wyrażenia istnienia obiektów tego typu. Jednak w myśl sformułowanych wyżej definicji zobowiązania ontologicznego, nie ma możliwości wyrażenia w ramach ATM zobowiązań do istnienia takich obiektów, gdyż zobowiązania ontologiczne to zobowiązania do istnienia indywiduów (zmienia się jedynie klasa wyrażalnych własności).

(ii) Z drugiej strony, w różnych logikach badanych w ramach ATM posługujemy się silnymi środkami semantycznymi, odwołującymi się np. do pojęcia „mocy”, do pojęcia „zbioru nieskończonego” itd. Pojawia się zatem pytanie, czy jakieś zobowiązania ontologiczne (np. właśnie do zbiorów) nie wynikają z samego faktu wprowadzenia silniejszych środków semantycznych? Czy jest „uczciwie” wykorzystywać silniejsze środki semantyczne, ale twierdzić jednocześnie, że nie ma to żadnego znaczenia dla przyjmowanej ontologii? Innymi słowy, czy silne, nieelementarne logiki nie zobowiązują się — poprzez sam fakt, że w ich semantyce wykorzystywane są silniejsze środki semantyczne — do istnienia obiektów takich, jak funkcje i relacje? Od jakich rozstrzygnięć metodologicznych zależy odpowiedź na to pytanie?

Rozstrzygnięcie tego problemu wiąże się ściśle ze stosunkiem do „tezy o logice pierwszego rzędu”, a ściśle rzecz biorąc — z pochodną wobec niej tezą (nazwę ją tutaj „tezą o liniowej postaci kanonicznej”), która głosi, iż prawdziwa forma logiczna zdania σ wyraża się równoważnym mu semantycznie zdaniem logiki elementarnej, jeśli zaś nie istnieje elementarne zdanie α takie, że $\sigma \leftrightarrow \alpha$, to prawdziwa forma logiczna zdania σ wyraża się odpowiednim zdaniem β logiki wyższego rzędu, takim, że $\sigma \leftrightarrow \beta$. Prawdziwe zobowiązania ontologiczne zdania σ można wtedy odczytać ze zdania β . Obejmować więc one mogą także zobowiązania do obiektów innych kategorii ontologicznych.

4.2. Quine’a dyskusja kwantyfikatorów Henkina. W [Quine 1969] Quine dyskutuje problem zobowiązań ontologicznych zdań z kwantyfikatorem Henkina, tj. zdań postaci $Q_H x, y, x', y' \phi(x, y, x', y')$, gdzie Q_H jest nieliniowym prefiksem kwantyfikatorowym postaci: „Dla dowolnego x istnieje x' , i dla dowolnego y istnieje y' niezależne od x oraz x' , takie, że $\phi(x, y, x', y')$.” Przykłady takich zdań to „Pewien krewniak każdego wieśniaka i pewien krewniak każdego mieszczaucha nienawidzą się nawzajem” lub „Pewna książka każ-

dego pisarza została omówiona w pewnym eseju każdego krytyka". Zdań tych nie da się wyrazić w postaci liniowej z użyciem kwantyfikacji po indywiduach¹¹. Dlatego stosuje się zapis nieliniowy:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists x' \\ &\forall y \exists y' \varphi(x, y, x', y'). \end{aligned}$$

Zdania takie są natomiast równoważne zdaniu $\exists F, G \forall x, y \varphi(x, y, F(x), G(y))$, gdzie F, G są funkcjami. Stwierdzenie, iż „ y' nie zależy od x ” znajduje swoją formalizację poprzez wprowadzenie pojęcia funkcji. Rozważmy bowiem przykład książek i esejów. Zdanie $\exists F, G \forall x, y$ „książka $F(x)$ pisarza x została omówiona w eseju $G(y)$ krytyka y ” znaczy tyle, że każdy krytyk y napisał pewien esej $G(y)$, w którym omówił zbiór książek $\{F(x): x \text{ jest pisarzem}\}$ — przy czym w każdym eseju $G(y)$ został opisany ten sam zbiór książek $\{F(x): x \text{ jest pisarzem}\}$. Wyrażając to jeszcze inaczej: istnieje taki zbiór esejów — po jednym od każdego krytyka — że we wszystkich tych esejach jest omówiony ten sam ustalony zbiór książek — po jednej od każdego pisarza. Jednak przy tej eksplikacji mowa już o istnieniu zbioru książek i zbioru esejów.

Quine twierdzi, iż zdania z kwantyfikatorem Henkina faktycznie niosą w sobie zobowiązania do istnienia funkcji, gdyż prawdziwą formę logiczną zdania typu $Q_H \varphi$ można odkryć dopiero po przekształceniu go do kanonicznej, liniowej postaci. Dopiero postać liniowa pozwala też na ustalenie, jakie są prawdziwe zobowiązania ontologiczne takiego zdania — pozornie bowiem mówi ono o indywiduach, jednak tak naprawdę jest w nich ukryta forma kwantyfikacji po funkcjach (podobną opinię wyraża np. Barwise w [Barwise 1979, 49]). Dlatego, aby ustalić zobowiązania ontologiczne danego zdania (teorii) należy najpierw dokonać tłumaczenia do postaci liniowej. Wtedy być może konieczne będzie użycie kwantyfikacji po obiektach wyższych rzędów — będzie to świadczyć o tym, że zdanie zobowiązuje się do istnienia tych obiektów.

4.3. Definiowalność tych samych klas w różnych logikach. Rozważmy przykład trzech równoważnych semantycznie zdań:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \exists F \forall x, y [(F(x) = F(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (F(y) \neq x)]'' \\ \alpha_2 &= \exists t Q_{HX}, y, x', y' ((x = y \Leftrightarrow x' = y') \wedge t \neq x') \\ \alpha_3 &= Q_0 x (x = x). \end{aligned}$$

α_1 mówi, że istnieje funkcja będąca iniekcją, ale nie surjekcją. α_2 to tzw. zdanie Ehrenfeuchta, które — po „przetłumaczeniu” na język drugiego rzędu —

¹¹ Jest kilka możliwości zapisania zdania tego typu w postaci liniowej, niektóre z nich to:

(i) $\forall x \forall y \exists x \exists y' \varphi(x, y, x', y')$ — jednak treść tego zdania jest inna, ponieważ zarówno x' , jak i y' zależą od x oraz od y .

(ii) Odczytanie tego zdania jako $\forall x \exists x' \forall y \exists y' \varphi(x, y, x', y')$ też nie jest właściwe — tutaj y' zależy od x' oraz od x .

Argumentacja w pozostałych przypadkach jest podobna.

wyraża ten sam fakt. α_3 mówi po prostu, że istnieje nieskończenie wiele obiektów. Wszystkie trzy zdania sformułowane są w słowniku pustym i definiują klasę struktur nieskończonych. W pierwszym zdaniu odwołujemy się *explicite* do istnienia funkcji, w drugim — posługujemy się prefiksem Henkina, w trzecim — kwantyfikatorem Q_0 , czyli „istnieje nieskończenie wiele”. Czy któreś z tych zdań jest „uprzywilejowane”? W myśl tezy o liniowej postaci kanonicznej prawdziwa forma logiczna wszystkich trzech zdań wyrażana jest przez α_1 . Zdanie to jednak jawnie stwierdza istnienie funkcji. Tym samym zarówno zdanie α_2 , jak i zdanie α_3 tak naprawdę zobowiązują się do istnienia funkcji o pewnych własnościach.

Rozważmy teraz inny przykład:

$$\beta_1 = \forall x \exists ! y \varphi(x, y)$$

$$\beta_2 = \exists F \{ \forall x \varphi(x, F(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = F(x))] \}.$$

Pierwsze ze zdań jest elementarne, drugie jest zdaniem, w którym występuje kwantyfikacja po funkcjach. Oba opisują tę samą klasę modeli — takich, w których formuła φ jest formułą funkcyjną, tj. definiuje pewną funkcję. Czy zdania te zobowiązują się do istnienia funkcji? Rozstrzygnięcie, iż zdanie β_1 się nie zobowiązuje, zaś β_2 — tak, jest niedopuszczalne, bo oba definiują tę samą klasę modeli K , a zobowiązania teorii T (w szczególności pojedynczego zdania) są identyfikowane przez klasę $K = \text{Mod}(T)$, a nie przez to, jak jest ona zdefiniowana. Skoro zatem zdanie β_1 nie niesie ze sobą zobowiązań do istnienia funkcji, więc konsekwentnie należy uznać, że zdanie β_2 również nie niesie ze sobą takich zobowiązań. Na pozór wygląda to paradoksalnie, gdyż zdanie β_2 *explicite* stwierdza istnienie funkcji o pewnych własnościach. Wyjaśnienie tego faktu jest jednak następujące: odwołanie się do istnienia funkcji nie było konieczne dla zdefiniowania klasy K . Mowa jednak o zobowiązaniach, o tym, istnienie jakiego typu obiektów musimy przyjąć, aby zdefiniować klasę K . To klasa $K = \text{Mod}(T)$ wyznacza zobowiązania teorii T . Okazuje się, że założenie o istnieniu funkcji nie jest konieczne. Jeśli więc mamy dwa równoważne semantycznie zdania $\beta_1 \Leftrightarrow \beta_2$ takie, że jedno z nich wydaje się zobowiązywać do obiektów pewnego typu, a drugie zdanie (będące zdaniem elementarnym) — nie, to należy uznać, że faktycznie zobowiązanie takie nie ma miejsca. Wprawdzie klasa K została zdefiniowana zdaniem $\exists F \{ \forall x \varphi(x, F(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = F(x))] \}$, jednak dla jej zdefiniowania założenie o istnieniu funkcji nie jest konieczne.

W abstrakcyjnym, semantycznym ujęciu zdania (w szczególności zdania egzystencjalne) nie muszą być formułowane *explicite*. Istnieją natomiast — dzięki własności kwantyfikatora — odpowiednie klasy. Klasę $K \subseteq \text{Str}[\tau]$ będziemy uważać za klasę modeli dla zdania egzystencjalnego, gdy $K = \text{Mod}(\varphi(c))|_{\tau}$

(gdzie $c \notin \tau$)¹². Podobnie jest dla relacji czy funkcji — zdanie $\varphi(f)$, gdzie f jest nową stałą funkcyjną ($f \notin \tau$) jest semantycznym odpowiednikiem zdania $\exists F\varphi(F)$. $\text{Mod}(\exists F\varphi(F)) = \text{Mod}(\varphi(f)) \upharpoonright \tau$. Analogicznie: $\text{Mod}(\exists X\varphi(X)) = \text{Mod}(\varphi(R)) \upharpoonright \tau$, gdzie X jest zmienną zbiorową, zaś $R \notin \tau$ ¹³.

Można sformułować warunek kwantyfikatora dla funkcji czy relacji, stanowiący odpowiednik warunku kwantyfikatora dla indywiduów. Ma on postać:

(i) Warunek kwantyfikatora dla funkcji: dla dowolnego zdania $\varphi \in L[\tau \cup \{f\}]$ (gdzie $f \notin \tau$ jest nowym symbolem funkcyjnym) istnieje zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie, że $M \in \text{Mod}(\psi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g: M \rightarrow M$ taka, że $(M, g) \in \text{Mod}(\varphi)$. (Swobodnie mówiąc, znaczenie zdania ψ jest więc takie, jak znaczenie zdania $\exists F\varphi(F)$).

(ii) Warunek kwantyfikatora dla relacji: dla dowolnego zdania $\varphi \in L[\tau \cup \{P\}]$ (gdzie $P \notin \tau$ jest nowym symbolem relacyjnym) istnieje zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie, że $M \in \text{Mod}(\psi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $R \subseteq M^n$ taka, że $(M, R) \in \text{Mod}(\varphi)$. (Swobodnie mówiąc, znaczenie zdania ψ jest więc takie, jak znaczenie zdania $\exists X\varphi(X)$).

Warunek ten mówi o tym, że w danej logice L „modelowana” jest kwantyfikacja po zbiorach, relacjach czy funkcjach (a nie tylko po indywiduach — co zapewnia zwykły warunek kwantyfikatora). Nałożenie warunku kwantyfikatora dla funkcji czy relacji na daną logikę L byłoby równoważne żądaniu, aby była ona semantycznie co najmniej tak silna, jak logika drugiego rzędu. Warunek ten nie jest więc nakładany na logiki abstrakcyjne. Istotny jest jednak fakt, że w ujęciu ATM mamy możliwość identyfikowania zobowiązań do obiektów wyższych rzędów i zdefiniowania semantycznego odpowiednika pojęcia „kwantyfikacji po zbiorach czy relacjach”.

4.4. Abstrakcyjne kryterium zobowiązań do obiektów wyższych rzędów. Zdanie $\exists F \exists G \varphi(x, y, F(x), G(y))$ jest semantycznie równoważne zdaniu $Q_H \varphi(x, y, x', y')$. W pierwszym zdaniu *explicite* stwierdzamy istnienie funkcji, w drugim zdaniu takich odwołań nie ma. Oczywiście oba te zdania definiują tę samą klasę modeli $K = \text{Mod}(\varphi(x, y, f(x), g(y))) \upharpoonright \tau$, gdzie $f, g \notin \tau$. Pojawia się więc

PYTANIE ZASADNICZE: czy w definicji klasy K faktycznie odwołano się do istnienia obiektów innych kategorii ontologicznych niż indywidua (tzn. do istnienia funkcji)?

¹² Dokładniej: istnieje pewne zdanie $\varphi \in L[\tau \cup \{c\}]$ i odpowiada mu dokładnie zdanie $\psi \in L[\tau]$ takie, że znaczenie zdania ψ jest takie, jak znaczenie zdania „ $\exists x \varphi(x)$ ”, tzn.: $\text{Mod}(\psi) = \{M \in \text{Str}[\tau]: \text{jest } a \in M \text{ takie, że } (M, a) \in \text{Mod}(\varphi)\}$. Należy pamiętać o tym, że gdy składnia nie jest dana *explicite*, to zapis „ $\exists x \varphi(x)$ ” nie ma — ściśle rzecz biorąc — sensu formalnego. Jego interpretacja jest jednak jasna.

¹³ Dokładnie: $M \in \text{Mod}(\exists F \varphi(F))$ gdy jest pewna funkcja $g: M \rightarrow M$ taka, że $(M, g) \in \text{Mod}(\varphi(f))$, gdzie $f \notin \tau$ jest nowym symbolem funkcyjnym. Analogicznie: $M \in \text{Mod}(\exists X \varphi(X))$, gdy jest pewna relacja $R \subseteq M^n$ taka, że $(M, R) \in \text{Mod}(\varphi(P))$, gdzie $P \notin \tau$ jest nowym symbolem predykatowym.

Mają miejsce — jak już zauważono wyżej — następujące fakty:

FAKT 1

$$\begin{aligned} & \text{Mod}(\exists F \{ \forall x \varphi(x, F(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = F(x))] \}) = \\ & \text{Mod}(\{ \forall x \varphi(x, f(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = f(x))] \}) | \tau = \\ & \text{Mod}(\forall x \exists! y \varphi(x, y)) (= K_1), f \notin \tau \end{aligned}$$

FAKT 2

$$\begin{aligned} & \text{Mod}(\exists F \exists G \varphi(x, y, F(x), G(y))) = \\ & \text{Mod}(\forall x \forall y \varphi(x, y, f(x), g(y))) | \tau = \\ & \text{Mod}(Q_H \varphi(x, y, x', y')) (= K_2), f, g \notin \tau \end{aligned}$$

FAKT 3

$$\begin{aligned} & \text{Mod}(\exists F \{ \forall x, y [(F(x) = F(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (F(y) \neq x) \}) = \\ & \text{Mod}(\forall x, y [(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (f(y) \neq x)) | \tau = \\ & \text{Mod}(Q_0 x(x = x)) (= K_3), f \notin \tau. \end{aligned}$$

FAKT 1 oznacza iż dla zdefiniowania klasy K_1 nie jest konieczne odwołanie się do istnienia funkcji, gdyż K_1 jest definiowalna elementarnie za pomocą formuły $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Analogiczna interpretacja FAKTU 2 brzmi: definiując K_2 nie musimy się odwołać do istnienia funkcji, gdyż K_2 jest definiowalna zdaniem $Q_H \varphi$, w którym mowa jest tylko o indywiduach, tzn. tylko do istnienia indywiduów się w nim odwołujemy. Podobnie można interpretować FAKT 3: zdanie $\forall x, y [(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (f(y) \neq x)$ definiuje klasę struktur nieskończonych z pewną funkcją $g: M \rightarrow M$, tzn. definiowane modele mają postać (M, g) , gdzie $g: M \rightarrow M$. Redukty tych modeli do pustego słownika ($\tau = \emptyset$) to struktury o nieskończonym uniwersum. Ta sama klasa jest jednak też definiowalna zdaniem $Q_0 x(x = x)$, w którym już nie ma mowy o funkcjach, czyli w wypadku klasy K_3 nie pojawiają się zobowiązania do funkcji.

Czy taka interpretacja FAKTU 2 i FAKTU 3 jest zasadna? Odpowiedź na to pytanie zależy od uznania, jakie środki semantyczne uznamy za nieangażujące się ontologicznie w istnienie zbiorów, relacji i funkcji. Innymi słowy: jakie środki semantyczne uznamy za autonomiczne, a jakie jedynie za warianty notacyjne zdań egzystencjalnych drugiego rzędu.

W myśl wspomnianej wcześniej „tezy o liniowej postaci kanonicznej”, prawdziwa forma logiczna zdania σ wyraża się równoważnym mu semantycznie zdaniem α logiki elementarnej, jeśli zaś takie zdanie α nie istnieje, to prawdziwa forma logiczna zdania σ wyraża się odpowiednim zdaniem β logiki wyższego rzędu, takim, że $\sigma \Leftrightarrow \beta$. Ze zdania β można wtedy odczytać prawdziwe zobowiązania ontologiczne zdania σ . W szczególności — w myśl tej tezy — zdanie $Q_H \varphi$ *de facto* niesie w sobie zobowiązania do istnienia funkcji; podobnie zdanie $Q_0 x(x = x)$. Jeśli więc przyjmiemy tę tezę, to jedynie klasa K_1 jest definiowalna bez użycia zbiorów, natomiast zdefiniowanie klas K_2 i K_3 wymaga założeń o istnieniu obiektów wyższych rzędów.

„Teza o liniowej postaci kanonicznej” jest pochodna w stosunku do tezy Quine’a o logice pierwszego rzędu. Sam Quine (wedle mojej wiedzy) nie sformułował jej *explicite* w ten sposób, ale jednak wynika ona *implicite* z jego rozważań dotyczących tezy o logice pierwszego rzędu oraz interpretacji kwantyfikatora Henkina. Quine opowiadał się za logiką elementarną, odrzucając logikę drugiego rzędu jako fragment teorii mnogości. Znajdowanie odpowiedników zdań σ w logice drugiego rzędu pozwala na identyfikację zobowiązań, i tym samym na rozstrzygnięcie, czy zdanie σ jest dopuszczalne¹⁴.

Nie podejmuję tutaj dyskusji, jakie pojęcia mogą być uznane za pojęcia logiczne. Wykracza to zdecydowanie poza ramy tego artykułu. Jednak dowolne rozstrzygnięcie tego problemu prowadzi do wyróżnienia pewnej klasy środków semantycznych uznanych za angażujące jedynie indywidua oraz uznanych za angażujące także zbiory indywiduów (czy ogólnie: obiekty wyższych rzędów). Można to — abstrakcyjnie — sformułować w sposób następujący.

Rozważmy pewną klasę logik $L = \{L_s : s \in S\}$ i zdania pochodzące z tych logik.

Niech $IND = \{\sigma_i : i \in I\}$ będzie klasą tych zdań z logik L_s , które uznamy za zdania angażujące ontologicznie jedynie indywidua.

Niech $SET = \{\phi_j : j \in J\}$ będzie klasą tych zdań z logik L_s , które uznamy za zdania angażujące istnienie zbiorów (ogólnie: obiektów wyższych rzędów)¹⁵.

Przyjęcie tezy o logice pierwszego rzędu implikuje, iż $IND =$ zdania $L_{\omega\omega}$. Jest to najwęższe pojęcie „zdaniami angażującego jedynie indywidua”. Jeśli uznamy np., że kwantyfikatory mocy nie angażują niczego poza indywiduami, to odpowiednio rozszerzy się klasa IND (a zawęzi klasa SET).

Rozważmy teraz dowolną klasę modeli K . Jakie zobowiązania ontologiczne pojawiają się przy definiowaniu tej klasy modeli? Gdy przyjmiemy pewien podział IND/SET , wówczas odpowiedź na to pytanie jest prosta: jeśli istnieje zbiór $I_0 \subseteq I$ taki, że $K = \text{Mod}(\{\sigma_i : i \in I_0\})$ oraz wszystkie zdania $\{\sigma_i : i \in I_0\}$ są zdaniami pewnej ustalonej logiki L , to wówczas klasa K została zdefiniowana środkami nie odwołującymi się do obiektów wyższych rzędów¹⁶.

¹⁴ Tu należy wspomnieć o pewnej trudności — istnieją logiki abstrakcyjne silniejsze od logiki drugiego rzędu. Są zatem takie zdania w tych logikach, które nie mają odpowiednika w L_2 , i nie można w ich wypadku mówić o kanonicznej postaci liniowej. To jednak jedynie zaważa nieco granicę dyskusji.

¹⁵ Dokładnie: każda logika L_s wyznacza dla dowolnej sygnatury τ klasę zdań $L_s[\tau]$. Wówczas $IND[\tau]$ — klasa zdań σ takich, że jest logika L_s (dla pewnego $s \in S$) taka, że $\sigma \in L_s[\tau]$ i uznajemy, że σ zobowiązuje się jedynie do istnienia indywiduów. (Analogicznie dla $SET[\tau]$).

¹⁶ Warunek, iż wszystkie zdania $\{\sigma_i : i \in I_0\}$ są zdaniami pewnej logiki L jest potrzebny, gdyż w ogólnym przypadku, rodzina IND zawiera zdania z różnych logik. Aby zatem uznać, że klasa $K = \text{Mod}(\{\sigma_i : i \in I_0\})$ jest klasą modeli dla pewnej teorii, to konieczne jest, aby wszystkie zdania $\{\sigma_i : i \in I_0\}$ były L -zdaniami dla pewnej logiki L , tzn. że faktycznie $\{\sigma_i : i \in I_0\}$ stanowi pewną L -teorię.

Jeśli jednak nie jest to możliwe i konieczne jest także użycie zdań $\{\varphi_j; j \in J_0\}$, tzn. $K = \text{Mod}(\{\sigma_i; i \in I_0\} \cup \{\varphi_j; j \in J_0\})$, ale nie istnieje zbiór $I_1 \subseteq I$ taki, że $K = \text{Mod}(\{\sigma_i; i \in I_1\})$, to wówczas należy uznać, że konieczne jest odwołanie się do istnienia zbiorów.

Kryterium to jest zatem formą „logicznej brzytwy Ockhama” — trzeba przyjąć istnienie obiektów wyższych rzędów dopiero wówczas, gdy jest to konieczne dla zdefiniowania danej klasy modeli. Postać kryterium zależy od tego, jakie środki semantyczne uznamy za dopuszczalne, autonomiczne, czyli — *de facto* — od tego, jak zakreślimy granicę pomiędzy IND i SET.

W myśl tego kryterium oczywiste jest, dlaczego uznajemy, że klasa

$$K_1 = \text{Mod}(\exists F \{ \forall x \varphi(x, F(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = F(x))] \}) =$$

$$\text{Mod}(\{ \forall x \varphi(x, f(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = f(x))] \} | \tau, f \notin \tau$$

jest definiowalna środkami nie odwołującymi się do istnienia zbiorów — istnieje bowiem zdanie $\sigma = \forall x \exists! y \varphi(x, y)$, które definiuje klasę K_1 . Jeśli więc zdefiniuję klasę K_1 jako klasę modeli M takich, że istnieje tam funkcja taka, że $\forall x \varphi(x, f(x)) \wedge \forall y [\varphi(x, y) \Rightarrow (y = f(x))]$, to tak naprawdę mówiąc o funkcji dokonuję skrótu notacyjnego, bo mam na myśli jedynie fakt, że $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Podobnie, jeśli uznamy, że np. kwantyfikator Henkina czy kwantyfikator Q_0 nie angażują istnienia zbiorów (czyli uznamy, że $L_H[\tau] \subseteq \text{IND}[\tau]$ oraz że $L(Q_0)[\tau] \subseteq \text{IND}[\tau]$), to okaże się, że klasy

$$K_2 = \text{Mod}(\exists F \exists G \varphi(x, y, F(x), G(y))) = \text{Mod}(\forall x \forall y \varphi(x, y, f(x), g(y))) | \tau, f, g \notin \tau$$

oraz

$$K_3 = \text{Mod}(\exists F \{ \forall x, y [(F(x) = F(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (F(y) \neq x) \}) =$$

$$\text{Mod}(\forall x, y [(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)] \wedge \exists x \forall y (f(y) \neq x)) | \tau, f \notin \tau$$

także mogą być zdefiniowane bez użycia zbiorów, gdyż $K_2 = \text{Mod}(Q_H \varphi(x, y, x', y'))$ oraz $K_3 = \text{Mod}(Q_0 x(x = x))$. W zależności od rozstrzygnięcia, jakie są klasy IND i SET, uznamy, iż przy definiowaniu klas K_1 , K_2 i K_3 mają miejsce (lub nie) zobowiązania do obiektów wyższych rzędów.

Zgodnie z tym punktem widzenia zachodzi pewna dwoistość pomiędzy uznaniem występowania zobowiązań a uznaniem dopuszczalności (autonomiczności) silniejszych środków semantycznych (czy inaczej: tego, jaką klasę pojęć uznamy za pojęcia logiczne). W uproszczeniu: im silniejsze środki semantyczne uznamy za dopuszczalne (autonomiczne) tym mniejsza będzie klasa zobowiązań do obiektów wyższych rzędów. Innymi słowy: to, co uznamy za zobowiązanie ontologiczne danej teorii zależy od tego, jaką klasę pojęć uznamy za pojęcia logiczne.

Szczególnym przypadkiem tego problemu jest problem kwantyfikatora Henkina Q_H : czy może być on uznany za „samodzielny”, czy też uznamy, że zdania z kwantyfikatorem Henkina stanowią jedynie notacyjny wariant zdań typu $\exists F \exists G \forall x \forall y \varphi$? Na poziomie motywacji epistemologicznych czy semantycznych, problem brzmi: czy pojęcie „ x ” jest niezależne od y , zaś y' jest niezależne od x ” może być rozumiane bez odwołania się do pojęcia „funkcji”? W szcze-

gólności, czy przytaczane już wcześniej zdania (np. „Pewna książka każdego pisarza została omówiona w pewnym eseju każdego krytyka”) mogą być zrozumiane bez wprowadzania pojęcia „funkcji”? Od tych rozstrzygnięć (tzn. od rozstrzygnięcia, czy „tak naprawdę” semantyka kwantyfikatora Henkina zadana jest poprzez pojęcie funkcji) zależy, czy uznamy, że zdanie $Q_{Hx,y,x',y'}\varphi(x,y,x',y')$ zobowiązuje się do istnienia funkcji, czy nie.

4.5. Kilka uwag na temat kwantyfikatorów rozgałęzionych¹⁷. Kwantyfikator Henkina to najprostszy przypadek tzw. kwantyfikatora rozgałęzionego.

Rozgałęziony prefiks kwantyfikatorowy Q można zdefiniować jako trójkę $Q = (A_Q, E_Q, D_Q)$, gdzie A_Q i E_Q są skończonymi rozłącznymi zbiorami zmiennych (ogólnymi i egzystencjalnymi zmiennymi prefiksu Q), zaś $D_Q \subseteq A_Q \times E_Q$ jest relacją zależności między ogólnymi i egzystencjalnymi zmiennymi. Jeśli $(x,y) \in D_Q$, to powiemy, że zmienna egzystencjalna y zależy od zmiennej ogólnej x .

Prefiks Q jest liniowy, jeśli istnieje liniowy porządek $<$ na $A_Q \cup E_Q$ taki, że $(x,y) \in D_Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$. Na przykład prefiks Henkina jest zdefiniowany jako (A, E, Q) , gdzie $A = \{x, y\}$, $E = \{x', y'\}$, zaś $D = \{(x, x'), (y, y')\}$: zmienna x' zależy tylko od x , zmienna y' – tylko od y . Prefiks Henkina jest minimalnym prefiksem nieliniowym, gdyż zanurza się on — w stosownym sensie — w dowolny prefiks nieliniowy.

Język L^* z prefiksami rozgałęzionymi definiujemy jak język elementarny, z dodatkową regułą konstruowania formuł:

Jeśli $\varphi \in L^*$ oraz Q jest prefiksem nieliniowym, to $Q\varphi \in L^*$

Zachodzi następujące twierdzenie:

(i) Każda formuła drugiego rzędu klasy Σ^1_1 (tj. postaci $\exists X\varphi(X)$, gdzie X jest zmienną zbiorową, zaś φ nie zawiera już kwantyfikatorów zbiorowych) jest semantycznie równoważna pewnej formule postaci $Q\psi$, gdzie Q jest pewnym kwantyfikatorem rozgałęzionym, zaś ψ jest formułą elementarną.

(ii) Każde zdanie logiki L^* jest równoważne pewnej formule klasy Δ^1_2 , tj. formuły dającej się zapisać zarówno w postaci $\exists X\forall Y\alpha(X,Y)$, jak i $\forall X\exists Y\beta(X,Y)$.

Z twierdzenia tego wynika, że dowolne zdanie logiki drugiego rzędu postaci $\exists X\varphi(X)$ (gdzie φ nie zawiera już kwantyfikacji po zbiorach), jest semantycznie równoważne pewnemu zdaniu $Q\psi$, tzn. $\text{Mod}(\exists X\varphi(X)) = \text{Mod}(Q\psi)$ ¹⁸. Druga

¹⁷ Definicje i wyniki prezentowane w tym paragrafie są zaczerpnięte bezpośrednio z prac Mostowskiego i Krynickiego [Mostowski 1994], [Krynicki, Mostowski 1995], dlatego rezygnuję z podawania dalszych informacji bibliograficznych.

¹⁸ Ilustracją tego twierdzenia jest fakt, że zdanie $\exists F\exists G\forall x\forall y\varphi(x,y,F(x),G(y))$, jest semantycznie równoważne zdaniu $Q_H\varphi(x,y,x',y')$.

część twierdzenia mówi, że dowolne zdanie logiki L^* , jest semantycznie równoważne odpowiedniemu zdaniu drugiego rzędu¹⁹.

Jeśli więc uznamy dopuszczalność wszystkich skończonych kwantyfikatorów rozgałęzionych jako autonomicznych środków semantycznych, nie angażujących istnienia zbiorów, to okazuje się, że dowolna klasa $\text{Mod}(\sigma)$, gdzie σ jest zdaniem Σ_1^1 , jest tak naprawdę definiowalna bez odwołań do istnienia zbiorów, gdyż $\text{Mod}(\sigma) = \text{Mod}(Q\psi)$, gdzie Q — skończony kwantyfikator rozgałęziony, zaś ψ — elementarna. Z kolei druga część twierdzenia nakłada ograniczenia na to, jakie klasy modeli są definiowalne w logice z kwantyfikatorami rozgałęzionymi — wynika z niej istnienie klas modeli definiowalnych dopiero po założeniu istnienia zbiorów. Będą to klasy definiowalne formułami logiki drugiego rzędu o sile wykraczającej poza klasę Δ_1^1 .

Warto tu wspomnieć o jeszcze jednym interesującym fakcie. Logikę L^* można wzmocnić, wprowadzając tzw. operację dualizacji, zadaną przez następujący warunek semantyczny:

$$M \models Q^d\varphi \Leftrightarrow M \models \neg Q\neg\varphi$$

Otrzymaną tak logikę oznaczamy LBD. Jest ona istotnie silniejsza, niż L^* , okazuje się bowiem, że dowolna formuła drugiego rzędu φ jest równoważna pewnej formule ψ logiki LBD.

Jeśli zatem uznamy środki semantyczne, do jakich odwołuje się logika LBD, za autonomiczne, to okazuje się, że zobowiązania do istnienia zbiorów, wyrażane w logice drugiego rzędu mogą zostać wyeliminowane.

5. Co to są własności?

W ujęciu ATM pojęcie „zobowiązania ontologicznego teorii T ” rozumiane jest jako „egzemplifikacja własności w modelach dla T ”. Pojęcie „własności” jest więc istotne z punktu widzenia analizy problemu zobowiązań ontologicznych. Pojawia się pytanie, co to są własności, jak są identyfikowane w ogólnym, semantycznym ujęciu, gdy podstawowym obiektem i punktem wyjścia analiz są klasy modeli.

Własność w języku elementarnym możemy utożsamiać z definiującą ją formułą φ z jedną zmienną wolną. W każdym modelu M formuła φ definiuje podzbiór $\varphi^M \subseteq M$, gdzie $\varphi^M = \{a \in M : M \models \varphi(a)\}$ (φ^M to ekstensja własności φ w strukturze M). Podobnie jest w wypadku wzmocnień logiki elementarnej, gdy składnia jest zadana *explicite*. Mówiąc, iż $M \models \varphi(a)$ mamy bowiem na myśli fakt, że $M \models \varphi(x)[v]$, gdzie x — zmienna wolna w φ , zaś $v : \text{Var} \rightarrow M$ to wartościowanie takie, że $v(x) = a$. To jednak wymaga odwołań do składni²⁰.

¹⁹ Wnioskiem z tego twierdzenia jest istnienie pojęć wyrażalnych w logice drugiego rzędu, a niewyrażalnych w logice L^* .

²⁰ W logice elementarnej własności można utożsamiać z formułami z jedną zmienną wolną. Formuły tworzone są z formuł atomowych za pomocą spójników logicznych i kwan-

W abstrakcyjnym, semantycznym ujęciu dane są jedynie klasy L-elementarne. Jednak przysługująca wszystkim logikom abstrakcyjnym własność kwantyfikatora pozwala na naturalne zdefiniowanie pojęcia „zbioru obiektów o własności φ ”. Rozważmy bowiem logikę L , ustaloną sygnaturę τ oraz nową stałą $c \notin \tau$. Niech $\varphi(c)$ będzie zdaniem w języku $L[\tau \cup \{c\}]$. Zdanie $\varphi(c)$ odpowiada pewnej klasie modeli $\text{Mod}(\varphi(c))$. Wówczas w dowolnej strukturze $M \in \text{Str}[\tau]$ możemy wyróżnić zbiór $\varphi^M = \{a \in M: (M, a) \models \varphi(c)\}$, czyli $\{a \in M: (M, a) \in \text{Mod}(\varphi(c))\}$. Naturalne jest określenie φ^M jako zbioru elementów modelu M posiadających własność φ .

W ekstensjonalnym ujęciu ATM naturalne będzie więc utożsamienie własności φ (gdzie $\varphi \in L[\tau \cup \{c\}]$) z pewnym podzbiorem modelu — a dokładnie: z pewną klasą podzbiorów $E_M \subseteq M$ dla dowolnego $M \in \text{Str}[\tau]$. Nowa stała c odgrywa tu — semantycznie — rolę zmiennej wolnej (por. przypis 4).

Pojawia się teraz problem odwrotny: jak identyfikować pewne podzbiory modeli jako ekstensje własności? Przypuśćmy bowiem, że w pewnej klasie modeli K , w każdym $M \in K$ został wyróżniony pewien podzbiór $E_M \subseteq M$. Kiedy podzbiory te można uznać za ekstensję pewnej własności? Innymi słowy: kiedy zbiory $E_M \subseteq M$ składają się z obiektów „jednostajnie” zdefiniowanych jako posiadające (z punktu widzenia poszczególnych modeli $M \in K$) pewną własność?²¹ Klasa K nie jest *a priori* przypisana do żadnej logiki — może więc być identyfikowana i opisywana z punktu widzenia różnych logik L .

Punktem wyjścia jest więc pewna klasa modeli $K \subseteq \text{Str}[\tau]$ oraz klasa podzbiorów $\{E_M \subseteq M: M \in K\}$ (wyróżniona w pewien sposób). Klasę tę uznamy za klasę ekstensji pewnej własności definiowalnej w logice L , jeśli istnieje pewne L -zdanie φ słownika $\tau \cup \{c\}$ takie, że dla każdego $M \in K$, $E_M = \varphi^M = \{a \in M: M \models \varphi(a)\}$. Dany zbiór $E_M \subseteq M$ jest ekstensją pewnej L -własności, (dla pewnego $\varphi \in L[\tau \cup \{c\}]$), jeśli dla dowolnego $M \in K$ zachodzi:

$$(*) E_M = \{a \in M: (M, a) \in \text{Mod}(\varphi(c))\}, \text{ czyli} \\ \{(M, a): a \in E_M\} = \text{Mod}(\varphi(c)) \cap \{(M, a): a \in M\}$$

tyfikatorów. Dane są więc warunki syntaktyczne opisujące klasę formuł (a przez to własności). W ujęciu ATM wychodzimy natomiast od klas modeli i pojęcie „własności” musi być zrekonstruowane w inny sposób.

²¹ Ilustracja dla tego problemu jest następująca: wyobraźmy sobie, że w każdym kraju wskazano pewien zbiór samochodów. Pojawia się problem, czy zbiory te są — z punktu widzenia poszczególnych krajów — zdefiniowane w ten sam sposób? Mogą to być np. samochody o określonej cenie albo samochody należące do lekarzy, albo czerwone samochody typu kombi itd. Możliwość scharakteryzowania tego zbioru zależy od tego, jaki jest słownik oraz jakie są pojęcia wyrażalne w logice. Jeśli w języku jest tylko pojęcie ceny samochodu i mocy silnika, to nie da się — w ogólnym wypadku — zdefiniować np. klasy czerwonych samochodów typu kombi.

Definiowalność zbiorów E_M jest „jednostajna” w klasie K , jeśli dla pewnego ustalonego $\varphi \in L[\tau \cup \{c\}]$ i dla każdego $M \in K$, spełniony jest warunek $(*)^{22}$.

Od semantyki logiki L zależy, jakie klasy są elementarne. To, jakie są własności w modelach — czyli jakie podzbiory modeli $E_M \subseteq M$ stanowią ekstensje własności, czy ogólniej: kiedy dana grupa zbiorów $\{E_M \subseteq M : M \in K\}$ stanowi ekstensję jakiejś L -własności, zależy od tego, jakie są klasy L -elementarne. Jeśli dana jest klasa $\{(M, E_M) : M \in K\}$ oraz logika L , to pytanie o to, czy jest to klasa ekstensji dla pewnej L -formuły φ jest dobrze postawionym problemem technicznym. Pojawiają się jednak dwa pytania:

(1) Jak zidentyfikować logikę L , relatywnie do której dana klasa podzbiorów $\{E_M \subseteq M : M \in K\}$, jest własnością.

(2) Czy jest sens mówić o klasie „wszystkich (możliwych) własności”? To znaczy: czy jest sens mówić o klasie Φ_{MAX} , tak, że dla dowolnej logiki L , klasa Φ_L — własności definiowalnych w logice L — jest podklasą klasy Φ_{MAX} ?

W abstrakcyjnym ujęciu rozwiązanie problemu jest proste: ponieważ dana jest klasa wszystkich logik, to tym samym dana jest klasa wszystkich własności, które można rozważać. Ta klasa Φ_{MAX} składa się więc z wszelkich możliwych definiowalnych klas typu $\{(M, \varphi^M) : M \in Str[\tau]\}$, gdzie φ jest pewnym $L[\tau \cup \{c\}]$ -zdanem, dla pewnej logiki L . Interesujące jest jednak pytanie, czy dana własność pochodzi od jakiejś naturalnej logiki L , tj. logiki, którą jesteśmy skłonni zaakceptować²³.

Odnotujmy na koniec następujące obserwacje:

(i) Aby dana klasa $\{(M, E_M) : M \in K\}$ mogła być rozważana jako „kandydat” na ekstensję własności, to klasa ta musi być zamknięta na izomorfizmy: tzn: jeśli $M_1, M_2 \in K$, $M_1 \approx M_2$, $f: M_1 \rightarrow M_2$ jest izomorfizmem, to $f[E_{M_1}] = E_{M_2}$. W szczególności, jeśli badamy tylko jeden model M i $E_M \subseteq M$, to zbiór E_M musi być niezmienniczy ze względu na automorfizmy modelu M .

(ii) Im silniejsza jest logika L , tym więcej własności można w niej zdefiniować. Ilość definiowalnych własności jest pochodną tego, jak „drobne” są klasy L -elementarne. W szczególności oznacza to, że w silniejszych logikach można

²² Jeśli w podanym wyżej przykładzie samochodów okaże się, że wskazany w każdym kraju K zbiór S_K to zbiór czarnych samochodów o mocy silnika powyżej 120 KM, to mamy do czynienia z taką „jednostajną definiowalnością” (oczywiście przy założeniu, że słownik τ zawiera pojęcie „czarnego koloru” i „mocy silnika”). Klasy te będą definiowalne w logice elementarnej. Jeśli natomiast będzie to zbiór tych czarnych samochodów, od których istnieje dokładnie parzysta ilość samochodów o mniejszej mocy silnika, to zbiór ten — w ogólnym wypadku — nie jest definiowalny elementarnie, jest natomiast definiowalny w logice z kwantyfikatorem podzielności D_2 („ $D_2\varphi$ — ilość obiektów o własności φ jest parzysta”).

²³ Pojęcie „naturalnej logiki” nie jest ostre i nie będzie tu przedmiotem analiz. Jednak np. logika z dodanym kwantyfikatorem „istnieje parzysta ilość” wydaje się bardziej naturalna niż logika typu $L_{\kappa\lambda}$, dopuszczająca koniunkcje długości κ i ciągi kwantyfikatorów długości λ (gdzie κ i λ — pewne nieskończone liczby kardynalne).

zidentyfikować więcej zobowiązań ontologicznych danej teorii T — poprzez wskazanie większej ilości własności egzemplifikowanych w modelach dla T ²⁴.

Podsumowanie:

1. W naturalny sposób pojawia się problem zobowiązań do obiektów innych kategorii ontologicznych (np. obiektów wyższych rzędów, takich jak zbiory, relacje czy funkcje), tzn. problem, czy posługiwanie się silnymi, nieelementarnymi środkami semantycznymi nie niesie w sobie dodatkowych zobowiązań ontologicznych?

2. Według Quine'a, prawdziwa forma logiczna zdań z kwantyfikatorem Henkina wyraża się odpowiednim zdaniem drugiego rzędu (w którym występuje kwantyfikacja po funkcjach). Jest to szczególnie przypadek ogólniejszego zjawiska — prawdziwa forma logiczna zdania σ wyraża się równoważnym mu semantycznie zdaniem α logiki elementarnej, a jeśli nie ma elementarnego zdania α semantycznie równoważnego z σ , to równoważnym mu semantycznie zdaniem β drugiego rzędu.

3. Abstrakcyjnie można wyróżnić klasę zdań IND nie angażującą obiektów wyższych rzędów. Dana klasa modeli K jest definiowalna bez zobowiązań do obiektów wyższych rzędów, jeśli istnieje odpowiednia podklasa $IND_0 \subseteq IND$ taka, że $K = \bigcap IND_0$, tzn. że $K = \text{Mod}(\{\sigma : \sigma \in IND_0\})$.

Rozstrzygnięcie tego, jaka jest klasa IND, zależy jest od uznania, jakie warunki semantyczne uznamy za autonomiczne, a jakie za notacyjne warianty czy przeformułowania środków semantycznych logiki drugiego rzędu. W szczególności w wypadku kwantyfikatorów Henkina problem sprowadza się do pytania, czy uzasadnione jest stwierdzenie, iż semantyka dla kwantyfikatorów Henkina może być dana bez odwołania do pojęcia „funkcji”.

4. Jeśli uznamy kwantyfikatory rozgałęzione za autonomiczne, to wówczas zobowiązania do zbiorów wyrażone zdaniami drugiego rzędu klasy Σ_1^1 mogą być „anulowane” (gdyż zdanie σ klasy Σ_1^1 jest semantycznie równoważne pewnemu zdaniu postaci $Q\phi$, gdzie Q jest kwantyfikatorem rozgałęzionym, zaś ϕ jest formułą elementarną). Co więcej, jeśli dopuścimy także operator dualizacji, to wszystkie zobowiązania do zbiorów wyrażalne formułami drugiego rzędu mogą być — na mocy odpowiednich twierdzeń — „anulowane”.

5. Semantyczne odpowiedniki formuły z jedną zmienną wolną definiują własności. Podzbiory w modelach są ekstensjami własności, gdy są definiowalne w ten właśnie sposób. Pierwotne są tu klasy elementarne modeli; własności

²⁴ Istnieje pewien częściowy porządek $\leq_T$ na logikach (ściśle: w klasie L logik, które uznamy za interesujące), odzwierciedlający fakt, iż z punktu widzenia pewnej logiki może być więcej zobowiązań, niż z punktu widzenia drugiej:

$L_1 \leq_T L_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde L_1 -zobowiązanie teorii T jest też L_2 -zobowiązaniem teorii T (analogicznie $L_1 <_T L_2$ i $L_1 \equiv_T L_2$). Logika L_2 jest zatem $<_T$ -silniejsza, gdy pozwala na identyfikację większej ilości zobowiązań ontologicznych teorii T .

obiektów są definiowalne w sposób wtórny. Fakt, iż w ujęciu ATM można identyfikować szeroką klasę własności, umożliwia bardziej precyzyjną identyfikację zobowiązań ontologicznych teorii.

Bibliografia

- Barwise J., [1979] *On Branching Quantifiers in English*, „Journal of Philosophical Logic”, 8, s. 47–80.
- Ebbinghaus H.-D., [1985] *Extended Logics. The General Framework*, w: Barwise J., Feferman S. (red.), *Model-theoretic Logics*, Springer-Verlag, Berlin, s. 25–76.
- Krynicki M., Mostowski M., [1995] *Henkin Quantifiers*, w: Krynicki M., Mostowski M., *Quantifiers: Logics, Models and Computation*, Vol. I, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 193–262.
- Mostowski M., [1994] *Kwantyfikatory rozgałęzione a problem formy logicznej*, w: Pelc J. (red.), *Nauka i język*, Wyd. WFiS, Warszawa, s. 201–241.
- Quine W.V.O., [1969] *Existence and Quantification*, w: *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press, New York, s. 91–113.
- Wójtowicz K., [2001] *O pojęciu „zobowiązania ontologicznego”*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria”, R. 10, 2001, nr 1, s. 121–138.

Higher-order objects and ontological commitments

This article is a sequel to *On the concept of ‘ontological commitment’* (cf. „Przegląd Filozoficzny” X, 2001 nr 1) and addresses the problem of elimination of ontological commitments to higher-order entities by the use of appropriate semantic devices. The framework for the discussion is set by abstract model theory and the author focuses on branching quantifiers in his treatment of the problem. On a more general level he engages in the debate on “ontology *versus* ideology”.