

Krzysztof Wójtowicz

Kilka uwag o problemie niezależności w matematyce

W artykule poruszane są zagadnienia związane z problemem niezależności, statusu poznawczego zdań niezależnych, pozaformalnej argumentacji dotyczącej aksjomatów rozszerzających ZFC, a także prezentacji dyskusji o znaczeniu zjawisk niezależności w matematyce. Artykuł ma zasadniczo charakter przeglądu i nie ma na celu sformułowania kategorycznych tez dotyczących poruszanych problemów. Chodzi raczej o zaprezentowanie zagadnienia i wykazanie, że problem jest dobrze postawiony, ciekawy i wart refleksji filozoficznej.

1. Niezależność od PA i niezależność od ZFC

I twierdzenie Gödla głosi, iż (swobodnie mówiąc) dostatecznie bogate teorie matematyczne sformułowane w rachunku predykatów pierwszego rzędu są niezupełne — dla każdej takiej teorii T istnieje zdanie σ sformułowane w języku tej teorii, którego nie da się w ramach T udowodnić ani obalić.

Kiedy mowa jest o niezależności, najczęściej mamy na myśli arytmetykę Peano liczb naturalnych (PA) i teorię mnogości Zermelo-Fraenkla (ZFC), choć oczywiście twierdzenia Gödla stosują się także do wielu innych teorii matematycznych. Naturalne jest pytanie, czy status poznawczy zdań niezależnych od PA i zdań niezależnych od ZFC jest taki sam? Sądzę, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. PA jest formalizacją teorii liczb, odwołującą się do elementarnych środków (w ramach PA nie są np. formalizowane pojęcia analityczne czy geometryczne). Szereg problemów teoriolicebowych, dla których nie są znane rozwiązania w ramach środków dostępnych w PA (lub dla których wiadomo nawet, że takie rozwiązania nie istnieją) zostało rozwiązanych za pomocą technik np. analizy zespolonej czy geometrii algebraicznej. Jest to szczególnie przypadek ogólniejszego faktu: prawdziwe zdania dotyczące liczb naturalnych, które są niezależne od PA, często można udowodnić wykorzystując techniki teorii mnogości¹. Wykorzystanie silniejszych technik jest naturalne i zasadne,

¹ Przykładem jest wskazane przez Parisa i Harringtona zdanie o kombinatorycznej treści, które jest niezależne od PA, ale prawdziwe w N . Zdanie Parisa-Harringtona mówi o podziałowych własnościach zbiorów. Znane są też inne przykłady zdań o kombinatorycznej

gdyż celem jest „uchwycenie” prawdy o liczbach naturalnych, które są scharakteryzowane w ZFC. Modelem standardowym dla PA jest N, a jest on zdefiniowany środkami ZFC. A zatem, swobodnie mówiąc, „wyższą instancją” dla zdań niezależnych od PA jest ZFC i w ramach ZFC można rozstrzygnąć szereg takich zdań (choć nie wszystkie).

W wypadku ZFC sytuacja jest inna. Nie można mówić o standardowym modelu dla teorii mnogości. Nie ma możliwości odwołania się w wypadku zdań niezależnych od ZFC do jakiejś „wyższej instancji”, w ramach której te zdania byłyby rozstrzygalne. Ponieważ to teoria mnogości ZFC odpowiada powszechnie przyjętym standardom rozumowań matematycznych, więc odwołanie się do technik wykraczających poza ZFC wymagałoby podjęcia decyzji o zaakceptowaniu nowych standardów argumentacji matematycznej.

Pojawia się jednak pytanie, na ile zjawiska niezależności — niewątpliwie centralne dla teorii mnogości — są istotne dla „zwykłej” praktyki matematycznej. Gdyby bowiem ciekawe zdania niezależne występowały tylko w zaawansowanej, „abstrakcyjnej” teorii mnogości, to można byłoby powiedzieć, że nie mają znaczenia dla praktyki badawczej „zwykłego” matematyka. Gdyby natomiast okazało się, że niezależność jest czymś, co pojawia się także w „zwykłej” matematyce (a zwłaszcza w matematyce stosowanej), to wówczas problem statusu epistemologicznego zdań niezależnych nabiera nowego wymiaru.

Problem ten nie jest łatwy do rozstrzygnięcia. Istnieją zdania niezależne od ZFC, które dotyczą „zwykłych” kontekstów matematycznych², jednak brak jest powszechnej zgody co do tego, że faktycznie zdania te wyrastają z „codziennej” praktyki matematycznej, a nie z rozważań *stricto* teoriomnogościowych. Panuje wprawdzie powszechna zgoda co do tego, że pojęcia matematyczne można w elegancki i wygodny sposób zrekonstruować w ramach teorii mnogości, pojawiają się jednak też opinie, że teoria mnogości służyć winna jedynie jako narzędzie rekonstrukcji, zaś wewnętrzne problemy teorii mnogości (w szczególności istnienie zjawisk niezależnych) nie są istotne dla reszty matematyki³. W tej dyskusji nie można pominąć wyników Friedmana.

treści, które są niezależne od PA (np. zdanie Goodsteina-Parisa-Kirby’ego — mówi o tym, że zastosowanie do dowolnej liczby naturalnej pewnego algorytmu, w skończonej ilości kroków prowadzi do zera). Aby udowodnić te fakty, konieczne jest odwołanie się do środków wykraczających poza PA i wykorzystujących częściowo siłę ZFC. Por. np. [Murawski 1994], [Paris, Harrington 1977].

² Oto przykłady takich zdań:

(i) Niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcje ciągłe. Czy dla każdego zbioru Borelowskiego B, zbiór $f(\mathbb{R}) \cap g(B)$ jest mierzalny w sensie Lebesgue’a?

(ii). Niech X — zwarta przestrzeń Hausdorffa. Czy każda norma na algebrze $C(X, \mathbb{C})$ jest równoważna normie supremum? Por. [Dales, Woodin 1987].

³ Rzeczywiście, w „codziennej” praktyce specjalisty od równań różniczkowych czy procesów stochastycznych rzadko (a w zasadzie wcale) pojawiają się problemy o charakterze teoriomnogościowym.

2. Niezależne zdania Friedmana

Friedman [Friedman 1981, 1986] podał przykłady „zwykłych” zdań matematycznych, które są niezależne od ZFC. Co więcej, są niezależne także od $ZFC+V=L^4$. Ich udowodnienie wymaga przyjęcia założeń dotyczących istnienia pewnego rodzaju dużych liczb kardynalnych⁵. Oznacza to według ich autora, że „stanowią one przykłady interesujących twierdzeń, których udowodnienie w konieczny sposób wymaga wyjścia poza ogólnie akceptowane zasady rozumowań matematycznych” [Friedman 1981, 209].

Zdania, o których mówi Friedman [Friedman 1981], dotyczą własności funkcji borelowskich z kostki Hilberta w odcinek jednostkowy. Nie dotyczą więc „zwykłych” obiektów matematycznych, takich jak liczby rzeczywiste czy zespolone. Jednak Friedman [Friedman 1986] podał przykłady zdań niezależnych od ZFC, które dotyczą własności kombinatorycznych pewnych obiektów skończonych. Zdania te są dowodliwe tylko przy założeniu o istnieniu liczb Mahlo. W opinii autora, istnienie tych zdań stanowi przekonujący argument na rzecz tezy, że abstrakcyjna teoria mnogości może okazać się istotna także w kontekście zagadnień związanych z obiektami skończonymi. Zdania te bowiem „niemal dotyczą liczb naturalnych” [Friedman 1986, 93]. Friedman podkreśla, że inaczej niż w przypadku hipotezy *continuum* nie da się „obejść” tego problemu poprzez ograniczenie się do zbiorów konstruowalnych (czyli zawężenie pojęcia zbioru), gdyż zdania te są niezależne nie tylko od ZFC, ale również od $ZFC+V=L$.

Gdyby okazało się, że abstrakcyjne założenia teoriomnogościowe (takie jak założenia o istnieniu dużych liczb kardynalnych) są rzeczywiście istotne w badaniach nad obiektami skończonymi, prowadziłoby to, w opinii Friedmana, „do kryzysu w podstawach matematyki o niespotykanych rozmiarach”. Nie mamy bowiem żadnego sposobu, poza pewnymi niejasnymi intuicjami, aby rozstrzygać prawdziwość takich założeń [Friedman 1986, 93]. Tezę tę Friedman powtarza [Friedman 1998], gdzie wskazuje kolejne przykłady zdań kombinatorycznych, które mogą być rozstrzygnięte tylko za pomocą aksjomatów dużych liczb kardynalnych. Friedman twierdzi, iż wyniki te sugerują, że konieczne jest przemyślenie na nowo problemu, czym jest argumentacja matematyczna, i to w kontekście „przyziemnych” problemów matematycznych [Friedman 1998, 804].

Friedman analizuje implikacje filozoficzno-metodologiczne tych faktów w kontekście dyskusji dotyczącej aksjomatów dużych liczb kardynalnych w artykule *Normal Mathematics...* [Friedman 2000]. Wskazuje tam kolejne przykłady problemów wyrastających — jego zdaniem — z „codziennej praktyki”, dla których istotne okazują się założenia dotyczące dużych liczb kardynalnych. Ten

⁴ $V=L$ to aksjomat konstruowalności, który jest niezależny od ZFC.

⁵ Konieczne jest przyjęcie założenia, że $\forall n \exists \kappa$ (κ jest n -Mahlo). Nie wystarcza nawet założenie istnienia liczby n -Mahlo dla pewnego ustalonego n .

fakt stanowi dla niego kolejny argument na rzecz tezy, iż abstrakcyjna teoria mnogości może okazać się istotna także w „zwykłych” kontekstach matematycznych i tym samym problem poszukiwania nowych aksjomatów przestaje być wewnętrznym problemem teorii mnogości, a staje się problemem istotnym dla całej matematyki. Niezależność „dotyka” bowiem całej praktyki matematycznej.

Friedman formułuje następujące warunki metodologiczne, które powinny spełniać nowe aksjomaty, aby mogły zostać zaakceptowane:

- (a) Powinny być naturalne z punktu widzenia praktyki matematycznej.
- (b) Powinny być konkretne, tzn. dotyczyć np. matematyki dyskretnej.
- (c) Powinny dotyczyć pewnego tematu, tzn. nie powinny być formułowane *ad hoc*.
- (d) Powinny mieć odniesienie do możliwie dużego fragmentu matematyki.
- (e) Powinny być „otwarte” (*open-ended*).
- (f) Powinny mieć elementarne sformułowanie.
- (g) Ich wprowadzenie powinno być dostępne dla matematyków (np. pewne takie aksjomaty mogą być sformułowane w formie własności Ramseya, czyli własności podziałowych zbiorów).
- (h) Powinny znaleźć zastosowanie w normalnej matematyce, która była uprawiana przed podjęciem badań nad tematem, w kontekście którego powstały te aksjomaty [Friedman 2000, 439–440].

Warto zwrócić uwagę na dwa punkty, charakterystyczne dla stanowiska Friedmana:

(i) Friedman uznaje fakt, że tematy i problemy teorii mnogościowe nie są reprezentatywne dla matematyki jako całości. W związku z tym niezależność może być uznana za zjawisko istotne dopiero wówczas, gdy pojawia się w naturalnych kontekstach matematycznych. Tym samym Friedman akceptuje tezę, iż teoria mnogości musi dopiero wykazać swoje znaczenie dla „zwykłej matematyki” — aby mogła być uznana za coś więcej niż tylko środek używany do formalnej rekonstrukcji.

(ii) Friedman twierdzi jednak, że faktycznie można wskazać naturalne konteksty matematyczne, w których pojawiają się problemy, dla rozstrzygnięcia których konieczne jest wyjście poza ZFC, czyli poza powszechnie przyjęte standardy argumentacji matematycznej.

Odmienne stanowisko zajmują jednak często (zwłaszcza w odniesieniu do problemu znaczenia teorii mnogości dla matematyki) specjaliści z zakresu teorii mnogości. Na przykład Steel [Steel 2000] jako oczywistą traktuje tezę, iż problemy teorii mnogości są interesującymi i wartymi badań problemami matematycznymi. Podobnie Maddy wychodzi od założenia, że stawianie ograniczeń działaności matematycznej nie ma sensu, gdyż matematyka powinna rozwijać się w możliwie swobodny sposób. Każdy problem matematyczny wart jest badania, a w szczególności dotyczy to problemów teorii mnogości [Maddy 2000]. Pytanie o to, czy potrzebne są nowe aksjomaty, należy rozstrzygnąć poprzez ustale-

nie czy matematyka skorzystałaby z nowych aksjomatów, czy przyjęcie nowych aksjomatów wzbogaciłoby samą matematykę. Kryteria „naturalności” nie mają tu prostego zastosowania, gdyż sama praktyka teorii mnogości uzasadnia stawianie pytań i poszukiwanie odpowiedzi na nie — nawet jeśli wymaga to wyjścia poza panujące standardy. Steel i Maddy odrzucają zatem tezę (i), traktując jednocześnie jako niemalże tautologiczną tezę (ii). Niektórzy badacze przyznają jednak, że teoria mnogości jest w fazie „introwertycznej” i że zajmuje się zasadniczo swoimi wewnętrznymi problemami strukturalnymi. Z opinią taką zgadza się Jensen, który jednak jednocześnie wyraża nadzieję, że teoria mnogości, po wyjściu z tej fazy, stanie się znów ważna dla innych gałęzi matematyki [Jensen 1995, 407].

Najbardziej znanym przykładem zdania niezależnego od ZFC jest hipoteza *continuum* (CH)⁶. Warto więc przytoczyć (przynajmniej niektóre) głosy, jakie pojawiają się w dyskusji dotyczącej statusu CH.

3. Dyskusja wokół hipotezy *continuum*

Niesprzeczność CH z ZFC udowodnił Gödel w latach 30. XX wieku, a jej niezależność Cohen prawie 30 lat później. Już Gödel przypuszczał jednak, że CH jest zdaniem niezależnym od ZFC. Wielokrotnie podkreślał, że konieczne jest poszukiwanie nowych aksjomatów, które umożliwiłyby rozwiązywanie otwartych problemów matematycznych, w tym problemu *continuum*. Sądził, że rozwiązanie problemu *continuum* może być możliwe dzięki aksjomatom dużych liczb kardynalnych. Niedługo po odkryciu przez Cohena metody *forcingu* okazało się jednak, że aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie pozwalają na rozstrzygnięcie problemu *continuum* (por. [Levy, Solovay 1967])⁷. Easton zaś udowodnił, że *continuum* może przyjmować niemalże dowolne wartości⁸. Aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie dostarczyły zatem „danych” umożliwiających rozstrzygnięcie problemu *continuum*.

Czy problem *continuum* został rozwiązany dzięki wynikom Gödla i Cohena, czy nadal stanowi otwarty (w stosownym sensie tego słowa) problem matematyczny? Ponieważ CH jest niejako paradygmatycznym przykładem zdania

⁶ Hipoteza *continuum* głosi, iż moc zbioru liczb rzeczywistych jest następną po ω (czyli mocy zbioru liczb naturalnych) liczbą kardynalną. W równoważnym sformułowaniu: każdy nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest albo przeliczalny, albo równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych. Nie ma zbiorów mocy pośredniej.

⁷ Wyniki Levy’ego i Solovaya pokazują, że przyjęcie założenia o istnieniu liczby mierzalnej, zwartej, Ramsey’a itd., nie mówią nic o wartości *continuum* — tzn. niesprzeczne z założeniem istnienia tych liczb jest zarówno CH, jak i $\neg$ CH [Levy, Solovay 1967].

⁸ Dla dowolnej funkcji F , takiej że: (i) F jest niemalejącą funkcją z klasy regularnych liczb kardynalnych w liczby kardynalne; (ii) dla dowolnego κ : $\kappa < \text{cf}(F(\kappa))$; można skonstruować model dla teorii mnogości, w którym $2^\kappa = F(\kappa)$, dla dowolnej regularnej liczby kardynalnej κ [Easton 1970].

niezależnego od ZFC, więc pytanie to jest istotne dla całej dyskusji dotyczącej statusu zdań niezależnych od ZFC.

Opinie w tej kwestii są podzielone. Gödel — jako realista — uważał ten problem za dobrze postawiony, za autentyczny problem naukowy, dotyczący obiektywnie istniejącej rzeczywistości matematycznej. Zwolennikami uznania problemu *continuum* za prawdziwy problem (dotyczący obiektywnie istniejącego uniwersum zbiorów, nie jedynie metamatematycznych własności systemów formalnych) są także Dales i Woodin. Twierdzą oni, że jednym z zadań teorii mnogości jest badanie wniosków z przypisania *continuum* konkretnych wartości, aby w ten sposób poszukiwać naturalnych aksjomatów, umożliwiających rozwiązanie tego problemu [Dales, Woodin 1987, 90-91]. Mathias wyraża opinię, że im więcej wyników dotyczących relatywnej niesprzeczności poznamy, im lepiej poznamy zależności między modelami, tym lepiej poznamy także sam „świat zbiorów” [Mathias 1992]. Martin przyznaje się do „naiwnego i bezkrytycznego” stanowiska w kwestii hipotezy *continuum* — uważa ją za autentyczny problem, nie zaś za kwestię czysto formalną. Przyznaje jednak, że stanowisko takie jest trudne do utrzymania, gdyż olbrzymia liczba wyników dotyczących relatywnej niesprzeczności (przy jednoczesnym braku przekonujących aksjomatów, umożliwiających rozwiązanie problemu) podważa wiarę matematyków w sensowność stawiania takich pytań [Martin 1976, 90-91]. W podobnym duchu wypowiada się Scott, pisząc iż „modele są po prostu modelami dla aksjomatów pierwszego rzędu, a logika pierwszego rzędu jest słaba. Mam poczucie, że powinno być możliwe znalezienie silnych aksjomatów, które generowałyby te modele jako podmodele uniwersum, ale uniwersum rozumianego w absolutnym sensie” [Scott 1977, xiv].

W dyskusji tej pojawiają się także głosy przeciwnie. Cohen (twórca *forcingu*), będący zdeklarowanym formalistą, twierdzi, że istniejące rozwiązanie problemu *continuum* uważa za całkowicie zadowalające. Według niego, pytanie o „prawdziwą wartość *continuum*” jest pozbawione sensu, a wyniki dotyczące relatywnej niesprzeczności zamykają dyskusję (por. [Albers, Alexanderson, Reid 1990, 54]). Według Mac Lane’a, duża liczba wyników dotyczących niezależności zdań teoriomnogościowych od aksjomatów ZFC wskazuje na fakt, że pojęcie zbioru jest płynne, niedookreślone i przez to teoria mnogości nie może stanowić podstawy dla matematyki [Mac Lane 1986, 359; Mac Lane 1992]. Podobną opinię wyraża Mostowski: „jeśli istnieje dużo teorii mnogości, to żadna z nich nie może rościć sobie prawa do zajmowania centralnego miejsca w matematyce” [Mostowski 1979, 288]. Kanamori [Kanamori 1996, 46] twierdzi, że badania metamatematyczne prowadzone nad ZFC spowodowały, iż problem prawdy i niesprzeczności teorii stał się przedmiotem manipulacji formalnych — ponieważ tak, jak w algebrze. Sam fakt, że aksjomaty ZFC nie rozstrzygają CH wydaje się zadowalającym stanem rzeczy. W podobnym duchu wypowiada się Dehorney, pisząc, iż w świetle niezupełności ZFC celem badań jest nie tyle do-

wodzenie własności obiektów matematycznych, ile raczej „kalibracja” tych własności na skali coraz to silniejszych aksjomatów logicznych [Dehorney 1996, 379].

Widać więc nawet z tej pobieżnej prezentacji, że zdania na temat tego, jaki jest status problemu zdań niezależnych są podzielone. Rozbieżności w tych opiniach częściowo wiążą się z „prywatnym” stanowiskiem filozoficznym matematyków zajmujących głos w tej dyskusji. Zasadnicza linia podziału przebiega tutaj między sympatykami stanowiska realistycznego a jego przeciwnikami⁹. Jest bardziej naturalne, że platonik uzna te problemy za dobrze postawione. Jednak samo uznanie stanowiska realistycznego nie umożliwia podjęcia konkretnej decyzji. I odwrotnie — aby zastanawiać się nad zasadnością przyjęcia nowych aksjomatów nie trzeba być realistą. W tym duchu wypowiada się Martin [Martin 1998], twierdząc, iż można zastanawiać się na temat wiarygodności jedynie „biorąc w nawias” pytania dotyczące ontologii i treści, tzn. że możliwe jest ignorowanie stanowisk ontologicznych i mówienie o prawdzie i wiarygodności w bezpośredni sposób. Jednak pomimo, że brak jest tu zgody, to podejmowane są próby sformułowania argumentów na rzecz wiarygodności CH (lub jej negacji)¹⁰.

4. Zagadnienie istnienia dużych liczb kardynalnych

Opinie na temat „prawdziwej wartości *continuum*” są podzielone i w gruncie rzeczy nie są tu formułowane kategoryczne sądy. Można powiedzieć, że właściwie „nic nie wiadomo” na ten temat. Jakie są szanse na rozwiązanie tego problemu? Wiemy, iż Gödel wiązał nadzieję na rozwiązanie problemu *continuum* z badaniami dotyczącymi teorii dużych liczb kardynalnych. Przypuszczał, iż może się okazać, że z jakiegoś „maksymalistycznego” aksjomatu, będącego (w odpowiednim sensie) przeciwieństwem aksjomatu konstruowalności, będziemy mogli wyprowadzić negację CH i że umożliwi to rozwiązanie podstawowych problemów teorii mnogości, w szczególności hipotezy *continuum* ([Gödel 1947/64, 266], por. też [Moore 1990, 168]). Za tego typu maksymalistyczne aksjomaty (dotyczące dużych rozmiarów uniwersum) można uważać właśnie aksjomaty dużych liczb kardynalnych¹¹. Gödel pisze, że wprawdzie jest mała

⁹ Należy jednak pamiętać, że mowa tutaj o problemie o charakterze metodologicznym, dotyczącym statusu pewnego zagadnienia matematycznego. Zajęcie stanowiska wobec tego problemu nie jest równoważne zajęciu stanowiska w sporze ontologicznym, choć jest z nim w pewien sposób związane i może być nim motywowane.

¹⁰ Systematyczną analizę tej problematyki, tzn. problematyki poszukiwania zasad motywujących nowe aksjomaty, podejmuje Maddy [Maddy 1988a, 1988b]. Wyróżnia tam szereg reguł heurystycznych, które nazywa „regułami kciuka” (*rules of thumb*), motywujących uznanie pewnych aksjomatów za wiarygodne (por. też [Wójtowicz 1999], gdzie omawiane są argumenty tego typu).

¹¹ W teorii mnogości możemy udowodnić istnienie rozmaitych obiektów: zbioru liczb naturalnych, jego zbioru potęgowego, zbioru liczb rzeczywistych itd. Dostępne nam w ra-

szansa na to, żeby liczby Mahlo mogły przynieść rozwiązanie problemu *continuum*, ale mogą istnieć aksjomaty nieskończoności oparte na innych zasadach [Gödel 1947/64, 264–265]¹². Oczywiście Gödel nie twierdził, że samo sformułowanie nowych aksjomatów dostarczy „automatycznie” rozwiązania. „Kiedy pojęcie zbioru stanie się jasne, nawet gdy znajdziemy zadowalające aksjomaty nieskończoności, nadal pozostanie techniczny (tj. matematyczny) problem rozstrzygnięcia hipotezy *continuum* na podstawie aksjomatów” (por. [Wang 1996, 237]). Gödel nie twierdzi więc, że nasza analiza dostarczy nam „bezpośredniego” rozwiązania hipotezy *continuum*. Uzasadniane (odkrywane) aksjomaty dotyczyć będą struktury uniwersum mnogościowego jako całości i będą miały charakter bardziej fundamentalny. Mają one umożliwić lepsze uchwycenie znaczenia terminu „zbiór”.

Aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie umożliwiły jednak rozwiązania problemu *continuum* (por. wyniki Levy’ego, Solovaya i Eastona). Jednak teoria dużych liczb kardynalnych stała się centralnym nurtem badań teorii mnogości, dlatego warto przytoczyć (niektóre) opinie dotyczące wiarygodności aksjomatów dużych liczb kardynalnych.

Swobodnie mówiąc, zwolennicy aksjomatów dużych liczb kardynalnych są zwolennikami „niekończącego się uniwersum”. Argument tego typu *explicite* sformułował Zermelo [Zermelo 1930] pisząc, że ciąg modeli dla teorii mnogości nie ma końca; liczby graniczne (chodzi o liczby nieosiągalne) oddzielają modele niższego i wyższego typu. Zermelo miał tu na myśli modele dla teorii mnogości drugiego rzędu ZFC². W myśl tego stanowiska, powyżej każdego poziomu hierarchii teoriomnogościowej jest pewien poziom wyższy, do którego nie możemy „dostać się” środkami dostępnymi na poziomie, na którym aktualnie jesteśmy. Ta intuicja znalazła formalizację w postaci szeregu aksjomatów dużych liczb kardynalnych.

Stanowisko Zermelo można uznać za reprezentatywne dla zwolenników tezy o „nieograniczoności w górę” uniwersum. Kanamori i Magidor wyróżniają następujące argumenty na rzecz istnienia dużych liczb kardynalnych:

mach teorii środki pozwalają na udowodnienie szeregu twierdzeń egzystencjalnych, dotyczących w szczególności szeregu liczb kardynalnych. Okazuje się jednak, że można zdefiniować pewne bardzo duże obiekty, których istnienia nie da się w ramach ZFC udowodnić ani obalić — ich istnienie jest od ZFC niezależne. Aby „pracować” w teorii, w myśl której takie liczby istnieją, konieczne jest dołączenie do ZFC dodatkowych aksjomatów. Gödel nazywa aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych „silnymi aksjomatami nieskończoności”. Określenie to nawiązuje do faktu, że „z punktu widzenia” zbiorów skończonych, nie możemy udowodnić istnienia zbioru nieskończonego. Jego istnienie musimy zagwarantować odpowiednim aksjomatem. Podobnie jest w przypadku dużych liczb kardynalnych.

¹² Liczby Mahlo znajdują się stosunkowo „nisko” w hierarchii dużych liczb kardynalnych. Aksjomaty nieskończoności „oparte na innych zasadach” dotyczyłyby więc znacznie większych liczb kardynalnych.

(i). Z punktu widzenia zbiorów dziedzicznie skończonych, ω jest olbrzymią liczbą. Jeśli zatem stwierdzimy, że powinny także istnieć zbiory, które „z punktu widzenia” zbiorów mniejszych wyglądają tak, jak ω wygląda „z punktu widzenia” zbiorów dziedzicznie skończonych, to prowadzi nas to do aksjomatów dużych liczb.

(ii). Uniwersum V ma tę własność, że jeśli pewne zdanie φ jest prawdziwe w V , to jest prawdziwe także w pewnym początkowym segmencie uniwersum V_α (jest to tzw. zasada refleksji). To stanowi motywację dla rozważania liczb kardynalnych κ o podobnej własności (tzn.: jeśli coś jest prawdziwe w V_κ , to jest prawdziwe także w pewnym V_α , dla pewnego $\alpha < \kappa$). Taka liczba κ musi być oczywiście na tyle duża, aby V_κ przypominało całe uniwersum V ¹³.

(iii). Jeśli uznamy, że uniwersum jest tak duże, że istnieją „podobne” poziomy V_α i V_β , to prowadzi nas to w naturalny sposób do rozważania włożeń elementarnych uniwersum w siebie, które wiążą się z aksjomatami dużych liczb.

(iv). Dla wielu zdań z zakresu teorii mnogości (także zasad kombinatorycznych dotyczących małych liczb kardynalnych albo R), można podać równoważne im aksjomaty dużych liczb kardynalnych. Aksjomaty te stanowią zatem najsłabsze założenia, jakie należy przyjąć, aby udowodnić pewne twierdzenie kombinatoryczne. Duże liczby stanowią zatem niejako „miarę niesprzeczności” teorii.

(v). Aksjomaty dużych liczb kardynalnych stanowią silną metodę dowodzenia nowych twierdzeń teorii mnogości. Z intuicyjnego punktu widzenia, badania dotyczące dużych liczb kardynalnych pozwalają patrzeć na uniwersum teoriomnogościowe jako na interesujący świat „zaludniony bogactwem najrozmaitszych tworów”.

(vi). Kanamori i Magidor wskazują na fakt, że liniowe uporządkowanie dużych liczb kardynalnych umożliwia użycie ich w charakterze swoistej „skali niezależności”. Stanowi to silny argument na rzecz uznania teorii dużych liczb kardynalnych za „naturalną nadstrukturę dla ZFC”. Z wyjątkiem CH nie są znane naturalne pytania teoriomnogościowe, nie dające się rozstrzygnąć przy użyciu takich hipotez. Jak piszą autorzy, musiałyby one pochodzić „z innej galaktyki problemów” [Kanamori, Magidor 1978, 105].

Hauser [Hauser] twierdzi, iż jedyny naturalny kierunek rozwoju, zgodny z pierwotnymi intuicjami, to rozwój w kierunku aksjomatów dużych liczb kardynalnych. Jako argument na rzecz swojej tezy podaje dwa fakty:

¹³ Badania dotyczące związków pomiędzy zasadami refleksji dla ZFC a aksjomatami dużych liczb kardynalnych podjął Levy [Levy 1960].

(i) Logiczna siła zdań niezależnych daje się zasadniczo mierzyć aksjomatami dużych liczb kardynalnych (stanowią one zatem swoisty „miernik stopnia niezależności”)¹⁴.

(ii) Teorie mnogości z dużymi liczbami kardynalnymi są wzajemnie interpretowalne z teoriami wyrastającymi z programu badań nad tzw. modelami wewnętrznymi, który jest jednym z zasadniczych kierunków badań współczesnej teorii mnogości.

Fakty te — w opinii autora — stanowią istotny argument na rzecz wiarygodności aksjomatów dużych liczb kardynalnych. Stanowią także argument na rzecz tezy, iż pojęcie zbioru nie jest pojęciem „wewnętrznie nieostrym” (*inherently vague*). Gdyby bowiem tak było, to teoria mnogości rozwijałaby się w wielu wzajemnie sprzecznych kierunkach. Tymczasem zasadniczy kierunek rozwoju wyznaczony jest przez badania dotyczące aksjomatów dużych liczb kardynalnych.

W sporze o to, jakiego rodzaju rozszerzenie teorii mnogości jest właściwe (czyli: jaka jest struktura uniwersum zbiorów), istotną rolę odgrywają zasady heurystyczne, wyrastające z intuicji badaczy. Dla (nielicznych) zwolenników aksjomatu konstruowalności, obraz uniwersum, jako obiektu „rosnącego umiarkowanie, w sposób definiowalny”, jest naturalny, jednak dla większości specjalistów obraz ten jest zbyt ubogi. Motywy, jakimi się kierują przy swoich wyborach nie są kryteriami „czysto matematycznymi”, ale dotyczą pewnych preteoretycznych intuicji, metodologii badań czy wręcz psychologii twórczości matematycznej. Odwołania do tego typu kryteriów są przy poszukiwaniu wzmocnień dla ZFC nieuniknione. Na przykład Melles podsumowuje swoje rozważania na temat pewnych aksjomatów dotyczących *forcingu* stwierdzeniem, że jest swego rodzaju ironią losu, że matematyka, będąca synonimem pewności i precyzji, musi odwoływać się do kryteriów natury estetycznej, aby rozwiązywać problemy dotyczące jej podstaw [Melles 1994, 472].

5. Aksjomat konstruowalności

Scott [Scott 1961] udowodnił, iż istnienie liczb mierzalnych (czyli pewnego rodzaju dużych liczb kardynalnych) implikuje fałszywość aksjomatu konstruowalności. Aksjomat istnienia liczby mierzalnej (oznaczany zazwyczaj przez MC — od *measurable cardinal*) jest więc aksjomatem „konkurencyjnym” w stosunku do aksjomatu konstruowalności. Czy jest możliwe sformułowanie racjonalnych kryteriów podjęcia decyzji między tymi aksjomatami? Jakiego typu argumenty za i przeciw $V=L$ pojawiają się w dyskusji?

(1) Przeciwnicy aksjomatu konstruowalności wskazują na jego restryktywność. Zarzut, jaki często wysuwa się wobec aksjomatu konstruowalności, odnosi

¹⁴ Także według Jensena, fakt, iż aksjomaty dużych liczb kardynalnych są uporządkowane liniowo ze względu na relację relatywnej niesprzeczności, stanowi argument na rzecz ich wiarygodności [Jensen 1995, 406].

się m.in. do faktu, że ogranicza on pojęcie podzbioru liczb naturalnych. W myśl aksjomatu konstruowalności istnieją bowiem jedynie definiowalne podzbiory ω (opinię taką wyraża np. Moschovakis [Moschovakis 1980, 610]). Wielu matematyków uznaje to ograniczenie, uniemożliwiające uznanie istnienia „wszystkich zbiorów pojawiających się na danym etapie tworzenia uniwersum” za nieuzasadnione, (np. [Drake 1974, 131]). Podobną opinię znaleźć można u Foremana [Foreman 1998, 13], który pisze, iż aksjomat konstruowalności jako restryktywny nie uwzględnia „wszelkich możliwych zachowań zbiorów lub innych obiektów matematycznych”. W podobnym duchu wypowiadał się także Gödel. Aksjomat konstruowalności jest według Gödla „miminalistyczny” — zbiór potęgowy jest wtedy najmniejszy z możliwych.

(2) Maddy [Maddy 1993] stawia tezę, że $V=L$ sytuuje się w pewnym szczególnym nurcie myślenia o matematyce, który nazywa *definabilism* (nazwę tę można przetłumaczyć używając neologizmu „definionizm”). W myśl tego stanowiska, jedyne obiekty dopuszczalne w matematyce, to obiekty *explicite* definiowalne. Maddy wskazuje historyczne uwarunkowania tego poglądu, związane z ukształtowaniem się pojęcia funkcji: od „geometrycznych” i „mechanicznych” krzywych Kartezjusza, po współczesne ujęcie funkcji jako dowolnego przyporządkowania¹⁵.

Definionizmowi Maddy przeciwstawia kombinatoryzm (*Combinatorialism*), w myśl którego w matematyce współczesnej abstrahuje się od możliwości podania definicji badanych obiektów¹⁶. Definionizm Maddy nazywa „zdyskredytowaną maksymą metodologiczną” [Maddy 1993, 41]. Aksjomat konstruowalności lokuje się jednak w „definionistycznym paradygmacie”. Tym samym należy go odrzucić.

(3) Steel, dyskutując problem poszukiwania uzasadnień dla nowych aksjomatów teorii mnogości twierdzi, że nowy aksjomat winien stanowić część „najogólniejszego punktu widzenia”, założenie akceptowane przez wszystkich, a nie założenie eliminujące pewne struktury. Przyjęcie aksjomatu konstruowalności

¹⁵ W tym historycznym procesie można wskazać przykładowo kilka ważnych momentów:

(i) Dyskusja między Eulerem a d’Alembertem na temat pojęcia funkcji (dyskusja ta toczyła się w kontekście analizy zagadnienia struny drgającej). D’Alembert zawężył pojęcie funkcji do funkcji zadanych wyrażeniami analitycznymi, Euler dopuszcza szerszą klasę funkcji.

(ii) Riemann, dyskutując wyniki Dirichleta na temat możliwości przedstawienia funkcji w postaci szeregu Fouriera, dopuszcza ogólne pojęcie funkcji, także takich, które nie mogą być przedstawione w postaci szeregu Fouriera.

(iii) W dyskusji między Baire’em, Borelem i Lebesgue’em a Hadamardem, Hadamard opowiada się po stronie „anty-definionizmu” — nie jest zasadne ograniczanie się do badania obiektów definiowalnych. Dla dobrej matematyki wskazane jest badanie możliwie najszerszej klasy obiektów.

¹⁶ Oczywiście, we współczesnej matematyce posługiwanie się metodami niekonstruktywnymi jest na porządku dziennym. Trudno byłoby znaleźć zwolenników „definionizmu” wśród „praktykujących” matematyków.

określa jako jałowe, gdyż $V=L$ nie tyle rozwiązuje pewne kwestie, co po prostu uniemożliwia ich sformułowanie. Steel wskazuje na fakt, że przyjęcie $V=L$ rozstrzyga problemy matematyczne poprzez nadanie im pewnej interpretacji: zdanie ϕ jest po prostu interpretowane jako ϕ^L ¹⁷. Jednak taka reinterpretacja zdania ϕ może zostać wykonana na gruncie każdej teorii i może być uznana za zabieg czysto formalny. Przyjęcie aksjomatu $V=L$ jest zatem — z tego punktu widzenia — jedynie stwierdzeniem, że badamy tylko pewien fragment świata matematycznego. Nie musi być rozumiane jako stwierdzenie dotyczące struktury samego uniwersum matematycznego. Jednak ograniczenie badań tylko do L ogranicza świat matematyczny, gdyż znane są przykłady interesujących obiektów matematycznych poza L . To prowadzi go do konkluzji, iż $V=L$ nie jest atrakcyjnym aksjomatem i powinien zostać odrzucony [Steel 2000, 423].

(4) Zwolennikiem przyjęcia aksjomatu konstruowalności jest natomiast Devlin. $V=L$ stanowi według niego „naturalny aksjomat, ściśle związany z naszym rozumieniem pojęcia zbioru” [Devlin 1977, iv]. Devlin zwraca uwagę na fakt, że przyjęcie tego aksjomatu pozwala rozstrzygnąć wiele problemów (z algebry, teorii miary czy topologii), nierozwiązywalnych w samej teorii mnogości ZFC. Według niego, sytuacja jest tu podobna do przypadku pewnika wyboru, o którego przyjęciu zadecydowały względy pragmatyczne [Devlin 1977, iv]¹⁸. Devlin wyraża nadzieję, że w przypadku $V=L$ sytuacja się powtórzy i że aksjomat konstruowalności również zostanie zaakceptowany jako prawomocny aksjomat teorii mnogości. Założenie zawężające pojęcie zbioru (do obiektów definiowalnych) jest, według Devlina, naturalne i uzasadnione.

(5) Quine również wyraża opinię iż $V=L$ jest eleganckim, ekonomicznym aksjomatem. Jego stanowisko wychodzi jednak od innego typu argumentów: dla potrzeb matematyki stosowanej wystarczy matematyka uprawiana przy założeniu $V=L$. Ten aksjomat maksymalnie ogranicza uniwersum zbiorów — zarówno „na szerokość” (istnieją tylko obiekty definiowalne), jak i „na wysokość” (nie istnieją zbyt duże liczby kardynalne; por. dalej). Tym samym $V=L$ winien zostać przyjęty z powodów „ontologicznej ekonomii”, gdyż „pozwała on zapobiec niepotrzebnym wzlotom wyższej teorii zbiorów” [Quine 1997, 146].

Opinię utrzymaną w podobnym duchu przypisuje „zwykłemu matematykowi” Friedman [Friedman 2000, 436]. Według niego, specjalista w zakresie teorii mnogości poszukuje możliwie głębokich problemów, dlatego odrzuca $V=L$ ograniczający uniwersum tak, że szereg zjawisk tam się w ogóle nie pojawia.

¹⁷ Zdanie ϕ^L powstaje ze zdania ϕ poprzez ograniczenie zakresu zmienności kwantyfikatorów do L . Swobodnie mówiąc, zdanie ϕ jest wtedy interpretowane „z punktu widzenia L ”.

¹⁸ Pewnik wyboru (AC) od początku wzbudzał więcej kontrowersji od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. W początkowej fazie tworzenia się teorii mnogości toczyła się burzliwa dyskusja, dotycząca jego uzasadnienia i wiarygodności. Przeciwnikami przyjęcia pewnika — ze względu na jego niekonstruktywny charakter — byli np. Borel, Baire i Lebesgue, zaś zwolennikami — np. Hadamard i Zermelo. Por. [Moore 1982].

Natomiast dla matematyka teoria mnogości jest w zasadzie jedynie narzędziem dla podania ścisłej interpretacji (sformalizowania) dla matematyki, więc w gruncie rzeczy fakt, że zjawisk *stricte* teoriomnogościowych jest niedużo, jest faktem pożądanym. „Dla matematyka, matematyka nie jest gałęzią teorii mnogości” [Friedman 2000, 435]. Teoria mnogości jest dobrym i silnym narzędziem formalizacji, ale wyniki *stricte* teoriomnogościowe nie są istotne dla praktyki matematycznej. Tym samym ograniczenie klasy zjawisk teoriomnogościowych poprzez przyjęcie $V=L$ wydaje się odpowiadać nastawieniu „zwykłego matematyka”¹⁹.

6. Stanowisko Fefermana

Argumenty i opinie prezentowane wyżej miały pewną wspólną cechę: opierają się na założeniu, iż problem poszukiwania nowych aksjomatów jest dobrze postawiony i istotny dla rozwoju matematyki.

Odmienne, zdecydowanie sceptyczne stanowisko wobec programu poszukiwania nowych aksjomatów teorii mnogości zajmuje Feferman. Twierdzi on, iż teoria mnogości stanowi podstawę dla matematyki jedynie w tym sensie, że umożliwia jednolitą rekonstrukcję formalną. Dla dokonania takiej rekonstrukcji konieczna jest jednak jedynie znajomość pewnych najogólniejszych cech hierarchii mnogościowej. Specyficzne, wewnętrzne problemy teorii mnogości nie zawsze są natomiast problemami istotnymi dla matematyki i — co więcej — nie zawsze są problemami dobrze postawionymi. Tak np. CH jest problemem, który jest „wewnętrznie niejasny” (*inherently vague*), gdyż $P(\omega)$ nie jest dobrze określonym obiektem matematycznym [Feferman 2000, 405]. Żaden nowy aksjomat nie będzie mógł przynieść definitywnego rozwiązania problemu *continuum*.

Feferman podejmuje ogólny problem, czy faktycznie zjawiska niezależności są istotne dla praktyki matematycznej. Pozornie odpowiedź na to pytanie jest oczywista: jak wiadomo, poprzez arytmetyzację składni można znaleźć wyrażenie nierozstrzygalne dotyczące miejsc zerowych pewnego wielomianu o współ-

¹⁹ Tu należy zauważyć, że „zwykły matematyk” na ogół nie jest zbyt mocno zainteresowany podstawami matematyki i często nawet nie ma świadomości tego, w jaki sposób jego dyscyplina może zostać formalnie zrekonstruowana w teorii mnogości. A zatem pisząc o tym, że dla zwykłego matematyka teoria mnogości jest jedynie silnym narzędziem, nie mam na myśli faktu, że w swojej „codziennej praktyce” matematycy posługują się taką rekonstrukcją formalną. Również stwierdzenie Friedmana, że zwykły matematyk będzie raczej skłonny do uznania aksjomatu konstruowalności nie znaczy, iż problem ten uważa za istotny. Opinię „przeciętnego matematyka” (w ujęciu Friedmana) można sformułować swobodnie w sposób następujący: wewnętrzne problemy teorii mnogości są nieistotne z punktu widzenia „prawdziwej matematyki”. Skoro zatem jest taki aksjomat ($V=L$), który eliminuje te problemy, to jest to aksjomat pożyteczny i warto go przyjąć. W nieco złośliwym sformułowaniu: po przyjęciu aksjomatu $V=L$ „teoriomnogościowcy” mogliby zająć się czymś bardziej pożytecznym niż badaniami nad relatywną niesprzecznością dużych liczb kardynalnych (których i tak przecież nie ma).

czynnikach całkowitych. Mówiąc ściśle, istnieje prawdziwe, lecz niedowodliwe wyrażenie postaci:

$$\forall x \forall z_1 \dots \forall z_n [p(x, z_1, \dots, z_n) \neq q(x, z_1, \dots, z_n)]$$

Otrzymujemy zatem niezależne zdanie o charakterze teoriolicebowym — a przecież trudno o bardziej naturalne problemy matematyczne niż problemy teoriolicebowe! Feferman twierdzi jednak, że tego typu zagadnienia są odległe od praktyki matematycznej. W szczególności wielomiany, o których tu mowa, nie wyrastają z „codziennej” praktyki teorii liczb. Te nierozstrzygalne problemy diofantyczne nie mają interesującej treści matematycznej — zostały one „wygenerowane” poprzez analizy metamatematyczne. Problemy te nie różnią się zasadniczo w wypadku wyrażania zdań typu $\text{Con}(\text{PA})$, $\text{Con}(\text{ZFC})$, $\text{Con}(\text{ZFC}+\text{MC})$ — a przecież treść tych zdań jest zasadniczo różna! A zatem treść matematyczna tych równań nie ma wiele wspólnego z matematyczną treścią teorii, których niesprzeczność wyrażają te równania. Te fakty świadczą — według Fefermana — o tym, że nie można tu mówić o naturalnych problemach niezależnych.

Feferman negatywnie ustosunkowuje się też do opinii Friedmana, w myśl której można podać naturalne zdania niezależne od $\text{ZFC}+\text{V}=\text{L}$. Feferman pisze, iż zdanie Friedmana [Friedman 1986] „odwołuje się jedynie do pojęć matematyki skończonej, jednak jest nieskończenie odległe od zwykłych problemów matematycznych” [Feferman 1987, 202]. Friedman twierdzi, iż zdania te pokazują, że silne, wykraczające nawet poza ZFC metody teorii mnogości okażą się istotne w kontekście naturalnych problemów matematycznych. Jednak według Fefermana to stwierdzenie nie jest uzasadnione, gdyż zdania te są „sfabrykowane”, aby można było uzasadnić stosowną tezę. Argumenty na rzecz jego prawdziwości są wątpliwe. Feferman konkluduje stwierdzeniem, że konieczność posługiwania się takimi silnymi systemami w codziennej matematyce finitystycznej musi dopiero zostać wykazana [Feferman 1987, 202]. Podobną opinię wyraża także w *Why the Programs...* [Feferman 2000], gdzie analizuje argumentację Friedmana dotyczącą zdań o relacjach Boole’owskich. Twierdzi, że w zasadzie dla zbudowania spójnych podstaw dla matematyki potrzebne są tylko najogólniejsze cechy hierarchii kumulatywnej, brak jest natomiast jakichkolwiek danych, że instrumentarium wykraczające poza ZFC (a nawet poza znacznie słabsze systemy) będzie potrzebne do rozwiązania problemów kombinatorycznych interesujących z punktu widzenia pracy matematyka [Feferman 2000, 407].

Rozstrzygnięcie tego sporu jest o tyle trudne (lub wręcz niemożliwe), że jest to spór o to, co uznamy za „naturalne” zdanie matematyczne, za „naturalny” problem matematyczny i za „naturalny”, intuicyjny czy wiarygodny argument. Jest to zatem spór o charakterze poniekąd światopoglądowym i nie da się w nim sformułować konkluzyjnego argumentu.

7. Podsumowanie

1. Status zdań niezależnych od PA i ZFC jest inny — dopiero niezależność od ZFC jest „prawdziwą niezależnością”, stanowiącą barierę poznawczą.

2. Pojawia się problem, na ile zjawisko niezależności — istotne dla teorii mnogości — jest również istotne z punktu widzenia „codziennej” praktyki matematycznej. Opinie są tu podzielone. Według jednych (reprezentantem takiego stanowiska jest np. Friedman) można wskazać naturalne konteksty matematyczne, w których istotną rolę odgrywają techniki abstrakcyjnej teorii mnogości. Według innych (np. Fefermana) zagadnienia niezależności są w zasadzie nieistotne dla „zwykłej matematyki”, zaś przykłady zdań niezależnych są sztuczne i wyrastają z inspiracji metamatematycznych, a nie z praktyki badawczej matematyków.

3. Opinie w kwestii, czy zdania niezależne stanowią dobrze postawione problemy wymagające rozwiązania (w stosownym sensie tego słowa), czy też ustalenie ich statusu metamatematycznego kończy dyskusję, są podzielone. Jest to dobrze widoczne na przykładzie problemu *continuum*. Formułowane są jednak argumenty mające umożliwić (a przynajmniej przybliżyć) rozwiązanie tego problemu poprzez poszukiwanie precyzacji pojęcia „zbioru” w formie nowych aksjomatów.

4. Wśród nowych aksjomatów, rozszerzających ZFC można wyróżnić aksjomat konstruowalności i aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych. Są one wzajemnie sprzeczne i wyrastają z dwóch różnych wizji uniwersum matematycznego. Aksjomat konstruowalności jest dość powszechnie odrzucany jako restryktywny. Natomiast za naturalny kierunek rozwoju teorii mnogości wielu badaczy uważa program badań w zakresie teorii dużych liczb kardynalnych (który wpisuje się w „program Gödla”).

5. Odmienne jest w tej sprawie stanowisko Fefermana, który kwestionuje zasadność poszukiwań nowych aksjomatów i rozszerzeń teorii mnogości. Odrzuca on „doktrynę Gödla”, w myśl której należy „walczyć z niezależnością” poprzez formułowanie aksjomatów coraz to wyższych rzędów (wyrazem tego w wypadku teorii mnogości jest badanie aksjomatów dużych liczb kardynalnych).

Niezależnie jednak od konkretnych rozstrzygnięć, widoczne jest, że dyskusja wokół problemu niezależności, poznawczego statusu zdań niezależnych i programu poszukiwania nowych aksjomatów jest żywa i — w świetle nowych wyników formalnych — nabiera coraz większej aktualności.

Bibliografia

- Albers D.J., Alexanderson G.L., Reid C., [1990] *More Mathematical People*, Harcourt Brace Jovanovich, Boston.
- Dales H.G., Woodin W.H., [1987] *An Introduction to Independence for Analyst*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Dehorney P., [1996] *Another Use of Set Theory*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 2, s. 379–391.
- Devlin K., [1977] *The Axiom of Constructability*, Lecture Notes in Mathematics 617, Springer-Verlag.
- Drake F.R., [1974] *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*. North Holland.
- Easton W.B., [1970] *Powers of Regular Cardinals*, „Annals of Mathematical Logic”, 1, s. 139–178.
- Feferman S., [1987] *Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary?*, w: *L'infinito nella scienza*, red. G.T. Di Francia, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma.
- Feferman S., [2000] *Why the Programs for New Axioms Need to be Questioned*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 6, s. 401–413.
- Foreman M., [1998] *Generic Large Cardinals: New Axioms for Mathematics?*, w: *Documenta Mathematica. Jahrbuch der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berlin 1998, vol. 2, Rosenheim, s. 11–21.
- Friedman H., [1981] *On the Necessary Use of Abstract Set Theory*, „Advances in Mathematics”, 41, s. 209–280.
- Friedman H., [1986] *Necessary Uses of Abstract Set Theory in Finite Mathematics*, „Advances in Mathematics”, 60, s. 92–122.
- Friedman H., [1998] *Finite Functions and the Necessary Use of Large Cardinals*, „Annals of Mathematics”, 148, s. 803–893.
- Friedman H., [2000] *Normal Mathematics Will Need New Axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 6, s. 434–446.
- Gödel K., [1947/64] *What is Cantor's Continuum Problem?*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, s. 258–273.
- Hauser K., „Is Cantor's problem inherently vague?”, nieopublikowany rękopis.
- Jensen R., [1995] *Inner Models and Large Cardinals*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 1, s. 393–407.
- Kanamori A., [1996] *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 2, s. 1–71.
- Kanamori K., Magidor M., [1978] *The Evolution of Large Cardinal Axioms in Set Theory*, w: *Higher Set Theory*, red. G.H. Müller, D.S. Scott, Lecture Notes in Mathematics 669, Springer-Verlag, Berlin, s. 99–275.
- Levy A., [1960] *Principles of Reflection in Axiomatic Set Theory*, „Fundamenta Mathematicae”, 49, s. 1–10.
- Levy A., Solovay R.M., [1967] *Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis*, „Israel Journal of Mathematics”, 5, s. 234–248.
- Mac Lane S., [1986] *Mathematics: Form and Function*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mac Lane S., [1992] *Is Mathias an Ontologist?*, w: *Set Theory of the Continuum*, red. H. Judah, W. Just, H. Woodin, Springer-Verlag, Berlin.

- Maddy P., [1988a] *Believing the Axioms. I*, „The Journal of Symbolic Logic”, 53, s. 481–511.
- Maddy P., [1988b] *Believing the Axioms. II*, „The Journal of Symbolic Logic”, 53, s. 736–764.
- Maddy P., [1993] *Does V Equal L ?*, „The Journal of Symbolic Logic”, 58, s. 15–41.
- Maddy P., [2000] *Does Mathematics Need New Axioms?*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 6, s. 413–422.
- Martin D.A., [1976] *Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis*, w: *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*, red. F.E. Browder, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 28, AMS, Providence, Rhode Island, s. 81–92.
- Martin D.A., [1998] *Mathematical Evidence*, w: *Truth in Mathematics*, red. H.G. Dales, G. Oliveri, s. 215–232.
- Mathias A.R.D., [1992] *What is Mac Lane Missing?*, w: *Set Theory of the Continuum*, red. H. Judah, W. Just, H. Woodin, Springer-Verlag, Berlin, s. 113–118.
- Melles G., [1994] *Natural Internal Forcing Schemata Extending ZFC: Truth in the Universe?*, „The Journal of Symbolic Logic”, 59, s. 461–472.
- Moore G.H., [1982] *Zermelo's Axiom of Choice*, Springer-Verlag, Berlin.
- Moore G.H., [1990] *Introductory Note to 1947 and 1964*, w: *Gödel Kurt, Collected Works*, vol. 2, red. S. Feferman i in., Oxford University Press, New York, Clarendon Press, Oxford, 1986, s. 154–175.
- Moschovakis Y., [1980] *Descriptive Set Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- Mostowski A., [1979] *Recent Results in Set Theory*, w: *Mengenlehre*, red. U. Felgner, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, s. 276–302.
- Murawski R., [1994] *Hilbert's Program: Incompleteness Theorems vs. Partial Realisations*, w: *Philosophical Logic in Poland*, red. J. Woleński, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 103–127.
- Paris J., Harrington L., [1977] *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic*, w: *Handbook of Mathematical Logic*, red. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam.
- Quine W.V.O., [1997] *Na tropach prawdy*, tłum. Barbara Stanosz, Wyd. SPACJA, Warszawa.
- Scott D., [1961] *Measurable Cardinals and Constructible Sets*, „Bull. Acad. Polon. Sc.” 9, s. 521–524.
- Scott D., [1977] [Przedmowa do:] Bell J.L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Oxford, Clarendon Press.
- Steel J.R., [2000] *Mathematics Needs New Axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic”, 6, s. 422–433.
- Wang H., [1996] *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, Massachusetts.
- Wójtowicz K., [1999] *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Wyd. WFiS UW, Warszawa.

Zermelo E., [1930] *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, „Fundamenta Mathematicae”, 16, s. 29–47.

Some remarks on the problem of independence in mathematics

The problem of justifying new mathematical axioms is presented. By way of example the author discusses Friedman's independent sentences, the continuum hypothesis, large cardinal axioms and the axiom of constructability. The purpose of the article is to lend support to the thesis that the problem of justification of new axioms is far from trivial and deserves further attention.