

Z b i g n i e w T w o r a k

Zapomniana antynomia Russella

0. W niniejszym artykule chcę przypomnieć pewien epizod z historii logiki. Mam mianowicie zamiar zająć się jedną z antynomii odkrytych przez Bertranda Russella, o której rzadko się mówi, a która miała – jak sądzę – pewien wpływ na rozwój logiki. Zacznę od usytuowania owego epizodu we właściwym dla niego kontekście historycznym.

1. W roku 1893 ukazał się pierwszy tom znakomitego dzieła niemieckiego matematyka Gottloba Fregego (1848–1925) zatytułowanego *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet* (Prawa naczelne arytmetyki. Wyprowadzenie według zasad ideografii logicznej). Autor dążył w nim do ugruntowania arytmetyki liczb naturalnych (a z nią całej matematyki) jako części logiki. Chcąc ten problem rozwiązać, zbudował pewien system logiki, który obejmował Cantorowską teorię mnogości. Kiedy drugi tom *Grundgesetze* był w druku, okazało się, że zbudowany przez Fregego system jest sprzeczny. Odkrycia tego dokonał w 1901 roku angielski matematyk i filozof Bertrand Russell (1872–1970), analizując dowód twierdzenia Georga Cantora, że nie istnieje największa liczba kardynalna (lub zbiór wszystkich zbiorów). Russell o znalezionej sprzeczności powiadomił autora *Grundgesetze* w liście z 16 czerwca 1902 r. Frege „był tak wstrząśnięty tą sprzecznością – pisze Russell w swej autobiografii filozoficznej – że zarzucił próbę wydedukowania arytmetyki z logiki, czemu dotąd poświęcał niemal każdą chwilę swego życia” (Russell 1971, s. 80). Współcześnie rozumowanie związane z tą sprzecznością nazywa się antynomią Russella lub antynomią klas niezwrrotnych (tj. klas niebędących własnymi elementami). Dokładną analizę antynomii klas niezwrrotnych oraz zarys jej rozwiązania w postaci prostej teorii typów zawarł Russell w książce *The Principles of Mathematics* opublikowanej w 1903 r. Antynomia owa jest obecnie najbardziej znaną i zarazem pojęciowo najprostszą spośród tzw. antynomii teoriomnogościowych.

Pisząc *The Principles*, Russell zastanawiał się, czy są inne antynomie podobne do wcześniej odkrytej, ale których prosta teoria typów nie eliminuje. W roku 1902 znalazł on taką antynomię i natychmiast o swym odkryciu powiadomił Fregego w liście z 29 września:

W oparciu o twierdzenie Cantora [...] można tworzyć coraz to nowe antynomie. Np. gdy m jest klasą zdań [*eine Klasse von Sätzen*], to otrzymujemy „ $p \in m \supset_p p$ ” jako ich logiczny produkt. Zdanie to może należeć do klasy m albo [może do niej] nie [należać]. Niech w będzie klasą wszystkich zdań powyższego kształtu, które do klasy m nie należą, tzn.

$$w = p \supset [\exists m \ni \{p : \vdash q \in m \supset_p q \vdash p \sim \in m\}];$$

i niech r będzie zdaniem $p \in w \supset_p p$.

Następnie otrzymuje się $r \supset w \equiv r \sim \in w$.

Należy tu mówić o treści [*Inhalt*] zdań, a nie ich denotacji [*Bedeutung*]; bowiem zdania ekwiwalentne nie muszą być ujmowane jako identyczne (Frege 1969, s. 230).

Odkrytą antynomię Russell uważał za ważną, zapewne dlatego, iż kojarzyła się z podstawową dla semantyki Fregego ideą rozróżnienia sensu (*Sinn*) i denotacji (*Bedeutung*) zdań. Opisał ją następnie w *The Principles* (Appendix B, s. 527 i n.). Nieformalnie i najprościej możemy przedstawić ją następująco (ściśła wersja zostanie przedstawiona w paragrafie czwartym). Przyjmijmy, że: treść zdania = sąd. Jeżeli sąd głoszący, że wszystkie sądy są F , jest tożsamy z sądem głoszącym, że wszystkie sądy są G , to własności F i G są identyczne (kryterium identyczności). Z każdym zbiorem sądów $m = \{p: F(p)\}$ korelujemy sąd, że wszystkie sądy tworzące m są F . Korelacja ta wyznacza wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zbiorem sądów i zbiorem wszystkich jego podzbiorów, wbrew twierdzeniu Cantora.

Wkrótce po opublikowaniu *The Principles* Russell przystąpił do rekonstrukcji arytmetyki liczb naturalnych, a wraz z nią całej teorii mnogości w ramach systemu logiki nazwanego później *rozgałęzioną teorią typów* (*the ramified theory of types*). Rozgałęziona teoria typów miała zapobiegać zarówno antynomiom teoriomnogościowym, jak i antynomiom semantycznym (Russell nie rozróżniał ich, uważając, że wszystkie antynomie mają wspólne źródło i strukturę). Głównymi pracami Russella zawierającymi prezentację wspomnianego systemu są: artykuł *Mathematical logic as based on the theory of types* (1908) oraz napisane wraz z Alfredem N. Whiteheadem dzieło *Principia Mathematica* (t. 1 – 1910, t. 2 – 1912, t. 3 – 1913). W żadnej jednak z tych prac nie ma nawet wzmianki o drugiej z odkrytych przez niego antynomii (choć analizuje w nich inne rozpoznane antynomie). Wygląda to tak, jakby autor kompletnie o niej zapomniał, mimo że – prawdopodobnie – była ona pierwszym bodźcem do rozbudowania prostej teorii typów.

W roku 1958 niezależnie od Russella antynomię tę ponownie odkrył John Myhill jako rozumowanie zagrażające „logice sensu i denotacji” Alonzo Churcha – *logice realizującej główne idee semantyczne Fregego* (Myhill 1958). Dlatego współcześnie nazywa się ją *antynomią Russella-Myhilla*.

W niniejszej prezentacji skupię uwagę na pierwszej wersji wspomnianej antynomii, tj. wersji pochodzącej od Russella. Najpierw jednak przypomnę rozumowanie Cantora oraz niektóre punkty poglądów semantycznych Fregego. Są one bowiem bezpośrednio związane z przedmiotem niniejszego artykułu.

2. Zbiór wszystkich zbiorów (= zbiór pełny) jest to zbiór, którego elementami są wszystkie i tylko zbiory. Oznaczmy ów zbiór symbolem V . Można go utożsamić np. z kumulatywną hierarchią zbiorów (nad zbiorem $\emptyset$). Wówczas każdy zbiór jest elementem pewnego poziomu owej hierarchii. Za pomocą operacji potęgowania tworzymy zbiór potęgowy $P(V)$ (= zbiór wszystkich podzbiorów zbioru V). Skoro V jest zbiorem pełnym, a każdy element $P(V)$ jest zbiorem, więc $P(V) \subseteq V$. Z drugiej strony, każdy element V jest też elementem $P(V)$ (z uwagi na przechodność V), więc $V \subseteq P(V)$. W efekcie: $V = P(V)$. Zachodzi zatem bijekcja odwzorowująca zbiór V na zbiór $P(V)$ (co oznacza, że oba zbiory są równoliczne¹). Cantor pokazał, że dla dowolnego zbioru x takie odwzorowanie nie istnieje i zbiór $P(x)$ jest zawsze liczniejszy od zbioru x^2 . Dowód, że dotyczy to również zbioru V , wykorzystuje antynomię zbioru wszystkich zbiorów (tak rozumowanie to zakwalifikował Russell). Dla dowolnego zbioru $x \subseteq V$ tworzymy zbiór „przekątniowy” $\{y \in x: y \notin f(y)\}$, gdzie $f: x \rightarrow P(x)$ jest (jakąkolwiek) bijekcją. Oznaczmy go symbolem z_x (oczywiście $z_x \subseteq x$). Ponieważ f jest bijekcją, istnieje więc element $u \in x$ taki, że $z_x = f(u)$. A zatem,

$$\begin{aligned} u \in z_x & \text{ wtw } u \in \{y \in x: y \notin f(y)\} \\ & \text{ wtw } u \notin f(u) & (\text{bo } u \in x) \\ & \text{ wtw } u \notin z_x. \end{aligned}$$

Innymi słowy, z_x jest podzbiorem zbioru x takim, że jeśli $u \in x$, to $u \in z_x$ wtw $u \notin f(u)$, co pociąga za sobą, że nie istnieje $u \in x$, dla którego $f(u) = z_x$. Zbiór $z_x \in P(x)$ (bo $z_x \subseteq x$), lecz $z_x \notin x$. Rzecz jasna, $z_x \in V$. Kładąc V w miejsce x , otrzymujemy sprzeczność: zarazem $z_V \in V$ i $z_V \notin V$. Bijekcją jest (w szczególności) funkcja tożsamości id , określona wzorem $id(x) = x$. Dla dowolnego $x \subseteq V$ zbiór „przekątniowy” możemy więc zdefiniować jako zbiór $r_x = \{y \in x: y \notin id(y)\}$ lub prościej $r_x = \{y \in x: y \notin y\}$. Związek z antynomią Russella jest tu szczególnie wyraźny, gdyż zbiór r_V jest zbiorem wszystkich i tylko tych zbiorów, które nie są własnymi elementami.

3. Frege wprowadził swoje słynne rozróżnienie sensu i odniesienia (denotacji) w eseju *Über Sinn und Bedeutung* z 1892 roku. Oto fragment dotyczący tej sprawy:

Narzuca się teraz samo przez się, by ze znakiem (nazwą, zwrotem, literą) wiązać prócz tego, co on oznacza i co można nazwać jego znaczeniem [= denotacją – Z.T.], także coś, co nazwałbym jego sensem, i w czym zawarty jest ów sposób, w jaki przedmiot

¹ Dwa zbiory są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja odwzorowująca jeden z tych zbiorów na drugi.

² Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia Cantora (o mocy zbioru potęgowego)*.

jest dany. [...] Przy prawidłowym połączeniu znaku z sensem i znaczeniem znakowi odpowiada określony sens, a sensowi – określone znaczenie. Danemu zaś znaczeniu (przedmiotowi) może przysługiwać wiele nazw. W różnych językach, a nawet w tym samym, ten sam sens bywa wyrażany rozmaicie (Frege 1977, s. 61 i n.).

Podstawowy argument Fregego na rzecz rozróżnienia sensu i denotacji dotyczy relacji zachodzącej pomiędzy wyrażeniami danego języka a ich rozumieniem przez użytkowników tego języka: w rozumieniu wyrażenia dochodzi do uchwycenia jego sensu. Dla zdań treść jego doktryny jest następująca:

1. Podstawowym kontekstem rozróżnienia sensu i denotacji wyrażenia jest kontekst ekstensjonalny.
2. Denotacją zdania oznajmującego jest Prawda (*das Wahre*) lub Fałsz (*das Falsche*).
 - 2.1. Zdanie oznajmujące jest imieniem własnym Prawdy lub Fałszu.
 - 2.2. Wszystkie zdania prawdziwe (fałszywe) denotują to samo.
3. Sensem zdania oznajmującego (a właściwie znaku zdaniowego) jest zobiektywizowana myśl.
 - 3.1. Myśl jako sens zdania nie należy ani do świata przedmiotów fizycznych, ani do świata obiektów psychicznych.
 - 3.1.1. Myśl jest przedmiotem bezczasowym i nieprzestrzennym.
 - 3.1.2. Myśl odróżnia się zarówno od aktu myślenia, jak i wytworu aktu myślenia.
 - 3.1.3. Myśl jest niezależna od tego, czy istnieje ktoś mogący ją ująć, oraz od tego, czy istnieje jakiś język zdolny ją wyrazić.
 - 3.2. Myśl jest (pierwotnym) nośnikiem prawdziwości i fałszywości.
 - 3.2.1. Istnienie myśli nie polega na jej prawdziwości.
 - 3.3. Prawdziwość (fałszywość) myśli jest niezależna od możliwości uzasadnienia przez podmiot, że tak właśnie jest.
4. Sąd, akt sądzenia (*das Urteilen*) jest odróżniany od myśli jako sensu zdania i polega na uznaniu prawdziwości (fałszywości) myśli. Dla oznaczenia sądów – czyli treści, które się stwierdza – Frege wprowadza specjalny znak —, który stawiamy przed wyrażeniami o treści zdaniowej (kreska pozioma to kreska treści, a kreska pionowa to kreska sądu).
5. Oznajmienie sądu to twierdzenie.

Zdarza się, że zdanie nie denotuje ani Prawdy, ani Fałszu, lecz myśl. Kiedy jakieś zdanie występuje w mowie zależnej – a więc jest składnikiem określonego zdania intensjonalnego – wówczas oznacza ono swój pierwotny sens, tj. myśl, którą wyraża, gdy występuje jako wyrażenie niezależne. Dodajmy, że Frege odróżniał w takich przypadkach, odpowiednio, odniesienie zwykłe i odniesienie oboczne. Natomiast sensem takiego zdania jest sens słów „myśl, że ...”, który stanowi jedynie część myśli odpowiadającej całemu zdaniu złożonemu.

4. Przejdźmy teraz do sformułowania interesującej nas antynomii. Kluczowym pojęciem jest tu pojęcie sądu. Sąd rozumiany jest jako obiekt, który wyrażamy, dokonując stwierdzenia, tj. wypowiadając zdanie. Istnieje on niezależnie od tego, czy są jakieś istoty mogące go ująć, oraz niezależnie od tego, czy jest język zdolny go wyrazić. Sąd może być prawdziwy bądź fałszywy, przy czym pozostaje prawdziwy (fałszywy) bez względu na to, czy jest ktoś, kto potrafi jego prawdziwość (fałszywość) uzasadnić – jest prawdziwy, jeśli stan rzeczy, który wyznacza, jest faktem. Skoro sądy są obiektywnie istniejącymi przedmiotami, to mogą być elementami jakichś klas. Ale sądy mogą też być o klasach, w szczególności o klasach sądów. Ponadto, dla każdej klasy sądów istnieje sąd stwierdzający, że wszystkie tworzące ją sądy są prawdziwe. O takich sądach mówimy, że „stwierdzają logiczny produkt” klas, których dotyczą. Niektóre z nich są samoodnośne w tym sensie, że same należą do klasy, której logiczny produkt stwierdzają, np. sąd stwierdzający, że wszystkie sądy w klasie *wszystkich sądów* są prawdziwe. Rozważmy teraz klasę *w* złożoną z tych wszystkich sądów, które stwierdzają logiczny produkt jakiejś klasy, ale nie są samoodnośne. Ponieważ *w* jest klasą sądów, to istnieje sąd, powiedzmy *r*, stwierdzający logiczny produkt klasy *w*. Sprzeczność uzyskujemy, gdy próbujemy odpowiedzieć na pytanie: czy *r* należy do *w*, czy też nie należy?

Konstrukcja formalna tej antynomii wygląda następująco. Definiujemy:

$$D.1. \quad w = \{p: \exists m[(p = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(p \in m)]\}^3,$$

$$D.2. \quad r = \forall q(q \in w \rightarrow q).$$

Jeżeli α jest formułą złożoną, to wyrażenie „ $p = \alpha$ ” rozumiemy: p jest sądem, że „ α ”. Tak więc *w* jest klasą sądów takich, że istnieje klasa *m*, dla której p jest sądem stwierdzającym, iż wszystkie sądy q należące do *m* są prawdziwe, ale samo p nie jest elementem *m*. Z kolei *r* jest sądem stwierdzającym, że wszystkie sądy należące do klasy *w* są prawdziwe.

Do wyprowadzenia sprzeczności potrzebne są jeszcze, oprócz powyższych dwóch definicji, następujące dwie zasady. Wypada dodać, że sam Russell nigdzie wyraźnie ich nie sformułował. Zasada pierwsza stanowi, że identyczne sądy złożone mają identyczne argumenty (np. identyczne sądy warunkowe mają identyczne poprzedniki i identyczne następki). Symbolicznie:

$$Z.1. \quad \forall p, q, r, s [((p \bullet q) = (r \bullet s)) \rightarrow ((p = r) \wedge (q = s))],$$

gdzie $\bullet$ jest dwuargumentowym spójnikiem prawdziwościowym. Wedle zasady drugiej, jeżeli sąd ogólny głoszący, że wszystko spełnia formułę $\alpha(x)$, jest identyczny z sądem ogólnym głoszącym, że wszystko spełnia formułę $\beta(x)$, to dla dowolnego przedmiotu y sąd, że $\alpha(y)$ jest identyczny z sądem, że $\beta(y)$. Symbolicznie:

³ Zapis ten rozumiemy w następujący sposób: $p \in w \equiv \exists m[(p = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(p \in m)]$.

Z.2. $[\forall x \alpha(x) = \forall x \beta(x)] \rightarrow \forall y [\alpha(y) = \beta(y)]$.

Przypuśćmy, że:

$$(1) \quad r \in w,$$

tzn. sąd r jest elementem klasy w . Założenie to razem z D.1 prowadzi do:

$$(2) \quad \exists m[(r = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(r \in m)].$$

(2) gwarantuje więc istnienie pewnej klasy m , takiej że

$$(3) \quad (r = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(r \in m).$$

Opuszczając w (3) koniunkcję, otrzymujemy:

$$(4) \quad r = \forall q(q \in m \rightarrow q),$$

$$(5) \quad \neg(r \in m)$$

Z (4) i D.2 stosując zasadę wymienialności „równego przez równe”, dostajemy:

$$(6) \quad \forall q(q \in w \rightarrow q) = \forall q(q \in m \rightarrow q).$$

Z.2 daje:

$$(7) \quad [\forall q(q \in w \rightarrow q) = \forall q(q \in m \rightarrow q)] \rightarrow \forall q[(q \in w \rightarrow q) = (q \in m \rightarrow q)].$$

Stosując do (6) i (7) regułę odrywania, otrzymujemy:

$$(8) \quad \forall q[(q \in w \rightarrow q) = (q \in m \rightarrow q)].$$

Opuszczając w (8) kwantyfikator i wstawiając r za q , dostajemy:

$$(9) \quad (r \in w \rightarrow r) = (r \in m \rightarrow r).$$

Z kolei Z.1 daje:

$$(10) \quad (r \in w \rightarrow r) = (r \in m \rightarrow r) \rightarrow [(r \in w) = (r \in m) \wedge r = r].$$

Stosując do (9) i (10) regułę odrywania, dostajemy najpierw:

$$(11) \quad (r \in w) = (r \in m) \wedge r = r,$$

a następnie – po opuszczeniu koniunkcji:

$$(12) \quad (r \in w) = (r \in m).$$

Z (5), (12) stosując zasadę wymienialności „równego przez równe”, dostajemy:

$$(13) \quad \neg(r \in w).$$

Tak więc założenie (1) prowadzi do swego zaprzeczenia (13). Przypuśćmy teraz, że:

$$(14) \neg(r \in w).$$

Założenie to wraz z D. 1 daje:

$$(15) \neg \exists m[(r = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(r \in m)].$$

(15) jest równoważne z:

$$(16) \forall m[(r = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \rightarrow (r \in m)].$$

Po opuszczeniu w (16) kwantyfikatora i wstawieniu w za m dostajemy:

$$(17) (r = \forall q(q \in w \rightarrow q)) \rightarrow (r \in w).$$

Z tego przez D. 2 i regułę odrywania otrzymujemy:

$$(18) r \in w.$$

Również założenie (14) prowadzi więc do swego zaprzeczenia (18).

Dodajmy, że antynomię tą można rozpatrywać w wersji dotyczącej własności (a nie klas); staje się ona wówczas problemem teorii własności. Definicjom D. 1 i D. 2 nadajemy wówczas postać:

$$D.1'. \forall p\{W(p) \equiv \exists F[(p = \forall q(F(q) \rightarrow q)) \wedge \neg F(p)]\},$$

$$D.2'. r = \forall q(W(q) \rightarrow q).$$

Pozostała część rozumowania przebiega analogicznie do rozumowania powyższego. W efekcie otrzymujemy sprzeczność: zarazem $W(r)$ i $\neg W(r)$.

5. Russell *The Principles* kończy następującą uwagą:

Reasumując: wydaje się, że ta szczególna sprzeczność przedstawiona w rozdziale X [chodzi tu o antynomię klas niezwrrotnych – Z.T.] może być rozwiązana przez [prostą – Z.T.] teorię typów, ale istnieje jeszcze co najmniej jedna sprzeczność ściśle analogiczna do niej, której prawdopodobnie nie da się rozwiązać za pomocą owej teorii. Ogół przedmiotów logicznych lub sądów zawiera w sobie, jak się wydaje, podstawową trudność logiczną. Jak mogłoby wyglądać ostateczne rozwiązanie tej trudności, dotąd nie zdołałem odkryć; lecz ponieważ dotyczy ona samych podstaw rozumowania, rozważenie jej gorąco polecam uwadze wszystkich logików.

Dziedzinę przedmiotów opisywanych przez prostą teorię typów dzieli się na nieskończenie wiele klas (zbiorów) niepustych i wzajemnie rozłącznych zwanych

typami (logicznymi)⁴. Indywidua, tj. przedmioty niebędące zbiorami, tworzą typ najniższy, zwany zerowym. Zbiory indywiduów stanowią przedmioty typu pierwszego, zbiory zbiorów indywiduów stanowią przedmioty typu drugiego itd., zgodnie z zasadą, że elementami zbiorów typu $(n + 1)$ -ego są przedmioty typu n -tego. Podział relacji na typy nie różni się istotnie od podziału zbiorów niebędących relacjami, jest jednak bardziej skomplikowany i dlatego nie będziemy go tu rozważać⁵. Ontologicznej hierarchii typów przedmiotów odpowiada syntaktyczna hierarchia typów wyrażeń odnoszących się do tych przedmiotów. W tym celu dla każdego typu przedmiotów używa się odrębnego rodzaju nazw i zmiennych.

Jeżeli $\varphi(x^n)$ jest funkcją zdaniową, w której zmienna x jest typu n , to wyrażenie $\{x^n: \varphi(x^n)\}$ jest nazwą (zbioru przedmiotów spełniających funkcję $\varphi(x^n)$) typu $n + 1$. W języku teorii typów nie występują w zasadzie terminy stałe poza stałymi logicznymi. Gdyby się jednak chciało ten system uzupełnić stałymi, np. $\in$ i $=$, należałoby zaopatrywać je w indeksy typu (zwykle jednak indeksy przy stałych opuszcza się, jeśli nie ma groźby nieporozumień). Warunek sensowności (syntaktycznej) formuł zawierających stałą $\in$ brzmi następująco: formuła zdaniowa utworzona z symbolu $\in$ ($\in^{n+1}$) i dwóch jego argumentów zbudowana jest zgodnie z teorią typów, jeśli po lewej stronie występuje zmienna lub stała typu n , a po prawej zmienna lub stała typu $n + 1$; w przeciwnym przypadku zbudowana jest ona niezgodnie z teorią typów (czyli jest niegramatyczna). Innymi słowy, symbolu $\in$ ($\in^{n+1}$) wolno używać tylko dla oznaczenia przynależności przedmiotu typu n do zbioru typu $n + 1$. Z kolei warunek sensowności (syntaktycznej) formuł zawierających stałą $=$ ma postać: formuła zdaniowa utworzona z symbolu $=$ ($=^n$) i dwóch jego argumentów zbudowana jest zgodnie z teorią typów, jeśli po lewej i prawej stronie występuje zmienna lub stała tego samego typu n . Innymi słowy, symbolu $=$ ($=^n$) wolno używać tylko dla stwierdzenia równości przedmiotów tego samego typu.

Przypomnijmy, że źródłem antynomii klas niezwrotnych była funkcja kształtu $\neg(x \in x)$, użyta do zdefiniowania tzw. zbioru Russella $\{x: \neg(x \in x)\}$. Aby stała się ona wyrażeniem teorii typów, trzeba zmienną x zaopatrzyć w indeksy typów. Jeżeli zmienną x zaopatrzymy po obu stronach znaku $\in$ w ten sam indeks n , to otrzymane wyrażenie $\neg(x^n \in x^n)$ będzie niepoprawnie zbudowane z uwagi na niezgodności typikalne. Wyrażeniem poprawnym na gruncie teorii typów jest formuła postaci: $\neg(x^n \in x^{n+1})$, lecz nie może ono być użyte do zdefiniowania zbioru Rus-

⁴ Należy zaznaczyć, że Russell badał raczej funkcje zdaniowe niż zbiory (klasy). Stąd (nieco mylnie) teoria owa nazwana została *teorią braku klas* (ang. *no classes theory*). Ponieważ każdy zbiór ma postać $\{x: \varphi(x)\}$, można go utożsamić z funkcją zdaniową $\varphi(x)$ i dalej zamiast o zbiorach mówić tylko o funkcjach zdaniowych definiujących owe zbiory. Dodajmy jeszcze, że na gruncie teorii typów nie odróżnia się relacji należenia elementu do zbioru i relacji spełniania funkcji zdaniowej przez przedmiot.

⁵ Dokładne omówienie hierarchii typów można znaleźć np. w Mostowski 1948.

sella, gdyż występująca w nim zmienna x^{n+1} jest wolna. W efekcie wyrażenie $\{x^n: \neg(x^n \in x^{n+1})\}$ nie jest termem stałym. Łatwo ponadto zauważyć, że podział na typy wystarcza do usunięcia wszystkich antynomii, w sformułowaniu których występują $\in$ -cykle.

Według prostej teorii typów wszystkie sądy należą do jednego typu, mianowicie indywiduów. Niech m będzie nazwą dowolnego, lecz ustalonego zbioru sądów. Wówczas zbiór, do którego odnosi się $\{p: p = \forall q(q \in m \rightarrow q) \wedge \neg(p \in m)\}$, jest typu pierwszego. O każdym sądzie możemy sensownie zapytać, czy należy on do tego zbioru. Zarówno odpowiedź pozytywna, jak i negatywna na to pytanie jest wyrażeniem zbudowanym zgodnie z prostą teorią typów. W szczególności o każdym sądzie możemy sensownie zapytać, czy należy on do klasy w ($= \{p: \exists m[(p = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(p \in m)]\}$). Dotyczy to też sądu stwierdzającego logiczny produkt klasy w , tzn. sądu kształtu $\forall q(q \in w \rightarrow q)$, gdyż tak jak inne sądy jest on indywiduum, czyli typu zerowego. A to znaczy, że prosta teoria typów nie radzi sobie z przedstawioną w poprzednim paragrafie antynomią.

6. Russell przedstawiając swoją antynomię, posłużył się symboliką pochodzącą od Giuseppe Peano (1858–1932). Za powstanie antynomii Frege obwinął użytą przez Russella symbolikę (w monografii *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* opublikowanej w roku 1879 przedstawił własną symbolikę, w której część logiczna została całkowicie oddzielona od matematycznej; jednak żaden logik ani matematyk, poza, rzecz jasna, Fregem, nie zdecydował się owej symboliki użyć z uwagi na jej monstrualny wygląd).

Według Fregego napis „ $p = q$ ” wyraża, że znaki występujące po obu stronach symbolu identyczności mają to samo odniesienie (denotację), a nie, że mają ten sam sens (dla stwierdzenia tożsamości sensu Frege używał znaku równoważności). Tymczasem w definicji D.1 część „ $p = \forall q(q \in m \rightarrow q)$ ” wydaje się dotyczyć tożsamości myśli/sensów, nie zaś tożsamości znaczeń (tj. wartości logicznych). A zatem wyrażenie $\forall q(q \in m \rightarrow q)$ należy rozumieć raczej w ten sposób, że *oznacza* ono określoną myśl, gdy za zmienną m podstawimy nazwę jakiegoś konkretnego zbioru, a nie w ten sposób, że *wyraża* ono tę myśl. Ale wtedy, argumentuje Frege, możliwymi wartościami zmiennej m występującej w tym wyrażeniu nie mogą być zbiory (klasy) sądów, lecz ich określone „aspekty”, te mianowicie, które poszczególne myśli „naświetlają”. Z drugiej strony, część $\neg(p \in m)$ definicji D.1 dotyczy przynależności poszczególnego sądu do jakiegoś zbioru sądów, reprezentowanego przez zmienną m . A zatem zmienna m występująca w $\neg(p \in m)$ powinna być rozumiana w ten sposób, że wartościami jej są poszczególne zbiory sądów, nie zaś ich „aspekty”. Skoro zmienna m w obu swych wystąpieniach ma różne zakresy wartości, zbiory sądów i ich aspekty, nieuprawnione jest związanie jej przez jeden wspólny kwantyfikator, jak to ma miejsce w formule

$\exists m[(p = \forall q(q \in m \rightarrow q)) \wedge \neg(p \in m)]$. Zarazem przeprowadzona przez Russella inferencja wymaga, by w obu wystąpieniach zmienna m dotyczyła tych samych przedmiotów. Ostatecznie Frege konkluduje, że przedstawioną antynomię powoduje wadliwy symbolizm użyty przez Russella do wyprowadzenia sprzeczności. Uniknąć antynomii można przez jego zmianę. Sprzeczność daje się wyprowadzić tylko w systemie, w którym odrzuca się rozróżnienie sensu i denotacji, czyli – innymi słowy – identyfikuje się własność posiadania sensu i własność posiadania odniesienia przedmiotowego.

Czy jednak odpowiedź Fregego jest zadowalająca? Otóż Frege odnosi się krytycznie tylko do aspektu formalnego antynomii, milczy natomiast na temat jej aspektu treściowego, w szczególności pogwałcenia twierdzenia Cantora: ponieważ każdemu zbiorowi sądów/myśli możemy przyporządkować w sposób wzajemnie jednoznaczny pewien sąd/myśl, stwierdzający jego logiczny produkt, wydaje się, że zbiór wszystkich sądów/myśli i jego zbiór potęgowy mają tyle samo elementów. Antynomia ta stawia pod znakiem zapytania ontologię sensów Fregego.

Należy wspomnieć, że antynomia Russella-Myhilla nie zagrażała systemowi logicznemu Fregego z uwagi na jego całkowicie ekstensjonalny charakter.

7. Antynomia Russella-Myhilla opiera się na następujących założeniach (pozalogicznych):

- (i) Sądy wyrażane przez zdania są elementami intensjonalnymi języka (podobnie jak myśli Fregego).
- (ii) Z dowolnym zbiorem sądów można skorelować pewien sąd w taki sposób, że oba zbiory, tj. zbiór wszystkich sądów i jego zbiór potęgowy, są równoliczne.
- (iii) Dla dowolnego sądu p i dowolnej klasy sądów m pytanie „Czy $p \in m$?” jest sensowne (syntaktycznie).

W celu zapobieżenia antynomii każde z tych założeń można zakwestionować.

Ad. (i). Współcześnie rzadko zakłada się jakąś rozbudowaną ontologię sensów w rozważaniach nad językiem. Russell w późniejszym okresie wielokrotnie podkreślał, że wyrażenia używane do odnoszenia się do przedmiotów nie posiadają żadnej innej, dodatkowej własności semantycznej – wyrażania sensu. Ponadto przyjmuje się, że logika powinna unikać przypisywania swym wyrażeniom zbędnych założeń ontologicznych. W przypadku dwóch teorii logicznie równie dobrych pod innymi względami, lepsza jest ta, która zakłada istnienie bardziej zwyczajnych rodzajów przedmiotów.

Z najbardziej bezkompromisową krytyką sądów wystąpił W.V.O. Quine.

Wygłąda na to, że doktryna sądów jest poniekąd bezowocna, nawet jeżeli sobie wyobrażymy, że istnieje rozwiązanie idywuizacji sądów. Rozwiązanie to bowiem polegałoby na odpowiedniej definicji równoważności zdań; więc dlaczego nie mówić właśnie o zdaniach i równoważności, odrzucając sądy? Krótko mówiąc, sądy zostały wymyślone

ne jako cienie zdań, jeśli wolno mi tu zastosować metaforę Wittgensteina. W najlepszym wypadku nie dadzą nam one nic więcej niż same zdania. Nadzieja na coś więcej wynika tylko z tego, że bezkrytycznie zakładamy ich indywidualizację, do której nie pasuje żadna możliwa do zdefiniowania równoważność między zdaniami. Cienie okazały się upodobnione do pobożnych życzeń (Quine 1977, s. 20).

Do antynomii Russella-Myhilla podobne jest następujące rozumowanie, w którym nie występuje pojęcie sądu. Niech S będzie ogółem zdań jakiegoś języka, tj. $S = \{x: x \text{ jest zdaniem}\}$. Powiemy, że zdanie p jest o zdaniu q (w skrócie: $A(p, q)$), jeżeli p jest zdaniem kształtu $\forall x \alpha(x)$ oraz $\alpha(q)$. Na przykład, zdanie

(1) Każde zdanie języka polskiego zawiera czasownik

jest o zdaniu

(2) Sokrates tańczy.

Łatwo też zauważyć, że (1) jest jednocześnie o sobie samym, gdyż jest ono zdaniem języka polskiego i występuje w nim czasownik „zawiera”. Szczególnym przypadkiem zdania o sobie samym jest następujące zdanie:

Wszystkie zdania wydrukowane wewnątrz niniejszej ramki są ogólne.

Dla dowolnego $a \subseteq S$ rozważmy teraz zdanie kształtu $\forall x[x \in a \wedge \neg A(x, x)]$; skracamy je, pisząc p_a . Głosi ono, że żadne zdanie z a , dla dowolnego $a \subseteq S$, nie jest o sobie samym. Rzecz jasna, $p_a \in S$. Można też pokazać, że $p_a \notin a$. Przypuśćmy, że jest inaczej, czyli $p_a \in a$. Wtedy albo $A(p_a, p_a)$, albo $\neg A(p_a, p_a)$, tj. albo p_a jest o sobie samym, albo nie jest. Jeżeli $A(p_a, p_a)$, to wobec tego, że $p_a = [\forall x[x \in a \wedge \neg A(x, x)]]$, otrzymujemy najpierw: $p_a \in a \wedge \neg A(p_a, p_a)$, a następnie: $\neg A(p_a, p_a)$. Z drugiej strony, jeżeli $\neg A(p_a, p_a)$, a także $p_a \in a$ (na mocy założenia, to $p_a \in a \wedge \neg A(p_a, p_a)$). Ponieważ $p_a = [\forall x[x \in a \wedge \neg A(x, x)]]$ oraz $p_a \in a \wedge \neg A(p_a, p_a)$, więc $A(p_a, p_a)$. Przez *reductio ad absurdum* mamy negację założenia, czyli warunek, że $p_a \notin a$. Sprzeczność uzyskamy, biorąc w miejsce a zbiór S : zarazem $p_s \in S$ i $p_s \notin S$ (p_s głosi, że żadne zdanie ze zbioru (w języku) S nie jest o sobie samym).

Ad. (ii). Konstrukcja antynomii Russella-Myhilla opiera się na twierdzeniu głoszącym, że (1) z każdym zbiorem sądów można skorelować pewien sąd oraz (2) owa korelacja ma postać funkcji różnowartościowej. Inaczej mówiąc, pomiędzy zbiorem sądów a jego zbiorem potęgowym zachodzi bijekcja. Uzasadnia się je, pokazując, że każdemu zbiorowi sądów można przyporządkować sąd stwierdzający jego produkt logiczny. Odrzucenie (1) nie wchodzi w grę, o ile sądy i ich zbiory chcemy rozumieć jako przedmioty istniejące obiektywnie, tzn. niezależnie od tego, czy jest ktoś mogący je ująć, oraz od tego, czy jest język zdolny je wyra-

zić. Jeżeli dla dowolnego stanu rzeczy istnieje odpowiadający mu sąd, to odpowiedni sąd będzie też istniał dla każdego zbioru sądów. Pozostaje więc odrzucenie (2) (tzn. twierdzenia, że różnym zbiorom sądów można przyporządkować różne sądy): dla pewnych zbiorów m i $n - m$ i n są różne, lecz sądy stwierdzające ich logiczny produkt są takie same. Zasadniczy problem wiąże się ze znalezieniem odpowiednio słabego warunku identyczności dla sądów. Według cytowanego wyżej Quine'a zadanie sformułowania zadowalającego warunku identyczności dla sądów napotyka na liczne, nieprzezwyciężalne przeszkody.

Pewną interesującą propozycję rozumienia sądów (której jednak nie będziemy tu szczegółowo omawiać) przedstawili Jon Barwise i John Etchemendy (1987). Sądy uznaje się za określone obiekty teoriomnogościowe (zbiory), co pozwala ująć ich strukturę w postaci odpowiednich grafów. Dwa sądy (zbiory) są identyczne, jeśli obrazuje je ten sam graf (mimo że jeden i ten sam sąd może być obrazowany przez różne – nawet nieizomorficzne – grafy pod warunkiem, że ich odpowiednie węzły końcowe pokrywają się).

Ad. (iii). Wspomniałem wcześniej, że stratyfikacja przedmiotów tylko na typy i związane z nią ograniczenia dotyczące sensowności wyrażen okazują się niewystarczające w przypadku interesującej nas antynomii. W powstaniu sprzeczności ważną rolę odgrywa pogwałcenie tzw. *zasady błędnego koła*, którą po raz pierwszy sformułował Henri Poincaré (1854–1912): jeżeli definicja jakiegoś obiektu wymaga kwantyfikacji, to obiekt ten nie może być elementem zakresu zmiennej kwantyfikowanej. Stała się ona źródłem bardziej rozbudowanego niż w prostej teorii typów podziału przedmiotów i odnoszących się do nich wyrażen. Otóż w każdym z typów należy wyróżnić funkcje zawierające kwantyfikatory wiążące zmienne. W ten sposób otrzymuje się rozmaitość rzędów funkcji zdaniowych i definiowanych przez nie zbiorów. Dla funkcji typu pierwszego zasada przypisywania im rzędów jest następująca:

- jest ona rzędu pierwszego, jeśli w ogólne nie zawiera kwantyfikatora lub zawiera kwantyfikatory wiążące wyłącznie zmienne indywiduowe;
- jest ona rzędu drugiego, jeśli zawiera co najmniej jeden kwantyfikator wiążący zmienną reprezentującą zbiór rzędu pierwszego (zmienna rzędu pierwszego) i nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną wyższego rzędu;
- jest ona rzędu k , jeśli zawiera co najmniej jeden kwantyfikator wiążący zmienną rzędu $k - 1$ i nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną rzędu $j \geq k$.

Podobnie dla funkcji zdaniowych (i zbiorów) wyższych typów. Ponieważ wszystkie zbiory lub funkcje są ściśle określonego typu i rzędu, wykluczona jest możliwość mówienia w tej teorii o zbiorach lub funkcjach jakiegokolwiek typu i jakiegokolwiek rzędu. Możemy coś twierdzić jedynie o wszystkich zbiorach lub funkcjach typu n i rzędu k .

Hierarchii rzędów funkcji zdaniowych odpowiada hierarchia rzędów sądów. Dany sąd jest rzędu pierwszego, jeśli nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego jakąkolwiek zmienną propozycjonalną (ang. *proposition* – sąd). Ogólnie, dany sąd jest rzędu $k + 1$, jeśli zawiera kwantyfikator wiążący zmienną rzędu k i nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną rzędu $j \geq k$. W efekcie nie można mówić w tej teorii o sądach jakiegokolwiek rzędu. Można jedynie coś twierdzić o wszystkich sądach danego rzędu. Dla ilustracji rozważmy stwierdzenie Epimenidesa: „Każde moje stwierdzenie jest fałszywe”. Na gruncie rozgałęzionej teorii typów jego (częściowa) formalizacja wygląda następująco ($k = 1, 2, 3, \dots$):

(*) $\forall k^p$ [Stwierdza (Epimenides, k^p) $\rightarrow$ Fałszywe (k^p)].

Stwierdzenie (*) jest rzędu $k + 1$ i nie należy do zakresu zmiennej k^p . A zatem stwierdzenie Epimenidesa nie może dotyczyć samego siebie, lecz tylko dowolnego stwierdzenia rzędu niższego. Nie jest więc ono już antynominalne (stwierdzenie Epimenidesa jest antynominalne przy założeniu, że jest ono jego jedynym stwierdzeniem).

Rozważmy obecnie sąd r ($= \forall q(q \in \omega \rightarrow q)$). Ponieważ występuje w nim kwantyfikator wiążący zmienną propozycjonalną q , rząd jego jest o jeden wyższy niż rząd owej zmiennej. A to znaczy, że r nie należy do zakresu zmiennej q . W efekcie zapis $r \in \omega$ ($\neg(r \in \omega)$) jest niepoprawny. Ostatecznie antynomia usunięta została przez zacieśnienie pojęcia sensowności: zbiór obiektów dowolnego typu nie stanowi żadnej całości i żadne znaczące zdanie (sąd) nie może być o wszystkich obiektach w danym typie.

Rozwiązaniu Russella można zarzucić, że zostało „spreparowane” *ad hoc*. Skomplikowany podział przedmiotów na typy i rzędy prowadzi do wielu niepożądanych konsekwencji utrudniających budowę teorii matematycznych⁶. Zwrócono też uwagę, że po to, aby objaśnić rozróżnienie między rzędami czy zasadę błędnego koła, trzeba użyć funkcji (zdań) bez żadnych ograniczeń co do rzędu. Otóż Russell nie może wyjaśnić swej teorii bez mówienia o wszystkich zdaniach (funkcjach zdaniowych, sądach): każde zdanie (sąd) jest określonego typu i rzędu. Zakładamy, że zbiór $S = \{x: x \text{ jest zdaniem}\}$ wszystkich zdań istnieje. Dla dowolnego $a \subseteq S$ takiego, że a jest definiowalny, symbolem s_a oznaczmy zdanie dotyczące wszystkich zdań należących do a , np. zdanie powstające z funkcji: wszystkie elementy zbioru a są określonego typu i rzędu. Zdanie s_a jest rzędu wyższego niż jakiegokolwiek zdanie ze zbioru a , a więc nie należy ono do a ($s_a \notin a$). Z drugiej strony, jest ono zdaniem, a więc jest elementem zbioru S ($s_a \in S$). Sprzeczność, którą uzyskamy, gdy za a wstawimy S , można nazwać *antynomią teorii typów*.

⁶ W szczególności nie można posłużyć się metodą przekątnej w celu udowodnienia twierdzenia Cantora.

Czy więc język, w którym mówi się coś o wszystkich typach i rządach, jest niemożliwy (bezsensowny)?⁷ Jan Woleński zaproponował, aby ową antynomię potraktować jako argument na rzecz tezy o nieuniknionych ograniczeniach formalizacji:

aby cokolwiek [tj. jakikolwiek język] mogło być sformalizowane, coś innego [tj. pewien język] musi pozostać niesformalizowane (Woleński 1993, s. 32).

Wypowiedź ta sugeruje, że wszelkie wypowiedzi językowe – o ile mają jakiś sens – są w pewien sposób „zakorzenione” w języku potocznym. Peter F. Strawson pisze na ten temat tak:

pryswajanie sobie pojęć teoretycznych dyscyplin szczegółowych zakłada wcześniejsze opanowanie preteoretycznych pojęć codziennej praktyki [językowej] i opiera się na niej (Strawson 1994, s. 30).

Bibliografia

- Anderson C.A. 1987, *Semantical Antinomies in the Logic of Sense and Denotation*, “Notre Dame Journal of Formal Logic” 28, 1, s. 99–114.
- Barwise J., Etchemendy J. 1987, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford U. P., New York–Oxford.
- Church A. 1951, *Some new Axioms for the Logic of Sense and Denotation: Alternative (0)*, w: *Structure, Method and Meaning: Essays in Honor of Henry M. Sheffer*, ed. P. Henle, H. Kallen and S. Langer, New York: Liberal Art Press.
- Frege G. 1969, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburg.
- Frege G. 1977, *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa.
- Mostowski A. 1948, *Logika matematyczna*, Warszawa–Wrocław.
- Murawski R. 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań.
- Murawski R. 1988, *Rozwój symboliki logicznej*, Poznań.
- Murawski R. 1995, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 1995.
- Myhill J. 1958, *Problems Arising in the Formalization of Intensional Logic*, “Logique et Analyse” 1, s. 78–83.
- Priest G. 1995, *Beyond the limits of thought*, Cambridge U. P., Cambridge.
- Quine W.V.O. 1977, *Filozofia logiki*, tłum. H. Mortimer, Warszawa.
- Russell B. 1903, *The Principles of Mathematics*, Cambridge U. P., Cambridge.
- Russell B. 1908, *Mathematical logic as based on the theory of types*, “Mathematical Journal of Mathematics” 30, s. 222–262; przedruk w: J. van Heijenoort

⁷ Język taki musiałby być samoodnośny. Tymczasem teoria typów zakazuje, by wyrażenia odnosiły się do samych siebie.

(red.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard U.P., Cambridge, Massachusetts 1967, s. 150–182.

Russell B. 1971, *Mój rozwój filozoficzny*, tłum. H. Krahelska, C. Znamierowski, Warszawa.

Strawson P.F. 1994, *Analiza i metafizyka. Wstęp do filozofii*, tłum. A. Grobler, Kraków.

Woleński J. 1993, *Matematyka a epistemologia*, Warszawa.

A Forgotten Russell's Antinomy

In 1902 Bertrand Russell discovered an antinomy while analysing the proof of the uncountability of real numbers based on the diagonal process developed by Georg Cantor. The first three subsections of the article present the historical context of Russell's work and his initial assumptions. The author focuses on Cantor's antinomy of the class of all classes and on semantic views of Gottlob Frege. The fourth subsection offers a reconstruction of Russell-Myhill antinomy. The remaining three subsections discuss some possible ways of its elimination.