

J a r o s ł a w M r o z e k

Dwa oblicza matematyki, czyli co sprawia, że matematyka jest nauką

Tezę o istnieniu dwóch różnych rodzajów postrzegania matematyki w dobitny sposób wyartykułował George Polya, który napisał w przedmowie do jednej ze swoich książek:

Oficjalna matematyka prezentowana w wykończonej postaci wydaje się czysto demonstratywna, składająca się wyłącznie z dowodów. Jednak tworzenie matematyki przypomina dowolną inną dziedzinę twórczości ludzkiej. Musisz odgadnąć twierdzenie matematyczne, zanim go dowiedziesz; musisz mieć ideę dowodu, zanim dowiedziesz danego twierdzenia w szczegółach. Musisz łączyć obserwacje i stosować analogie; musisz próbować i próbować od nowa¹.

Rzeczywiście matematyka prezentowana w podręcznikach np. w monumentalnym dziele Bourbakiego *Elementy matematyki* – traktatu będącego przeglądem całej matematyki do połowy XX wieku – ma cechy ideologii w tym sensie, że zacierza ślady drogi, która doprowadziła do sformułowania danej teorii czy nawet konkretnego twierdzenia. Matematyka wykładów, monografii, artykułów, podręczników jest ścisła, uporządkowana, abstrakcyjna, czasami formalna. Jest podzielona na definicje, twierdzenia i dowody (zaopatrzone lub nie w komentarz). Każdy problem jest albo rozwiązany, albo jest uznany za kwestię otwartą. Na początku wykładu określany jest język teorii, wymieniane są pojęcia oraz twierdzenia pierwotne, a następnie wprowadza się definicje, reguły inferencji oraz formułuje twierdzenia wraz z dowodami. Standardowy wykład oczyszcza matematykę z kontrowersji, prób, pomija najmniejszy ślad zmagania z problemem u twórcy czy odbiorcy. Ten styl jest oficjalnym stylem matematyki. Oficjalny styl jest prezentacją matematyki w skończonej formie – wykładów, artykułów, czasopism.

¹ G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton, Princeton University Press, 1954.

Jednak relacje matematyków z krwi i kości dotyczące ich rzeczywistej pracy odbiegają istotnie od obrazu nakreślonego powyżej. Przykładowo Andrew Wiles, który siedem lat swojego życia poświęcił na udowodnienie *Wielkiego twierdzenia Fermata* tak charakteryzuje swoją pracę:

Moje własne doświadczenia z uprawianiem matematyki można chyba najlepiej oddać, porównując je do zwiedzania ciemnego gmaszyska. Wchodzę do pierwszego pokoju; jest ciemno, zupełnie ciemno. Drepczę w kółko i wpadam na meble, dowiadując się stopniowo, gdzie są ustawione. Po jakichś sześciu miesiącach znajduję wyłącznik i naciskam go. Światło zalewa nagle wszystko i wreszcie mogę zobaczyć, gdzie jestem. A potem wchodzę do następnego ciemnego pokoju...²

Słowa Wilesa zaświadczaają, że praktyka uprawiania matematyki jest zupełnie odmienna od tego, jak prezentuje się matematykę „oficjalnie”. Każdy, kto miał do czynienia z matematyką, wie, że jako pierwsze pojawiają się problemy. Matematyka jest ogromną siecią wszechpowiązanych problemów i ich rozwiązań. Matematyka w fazie tworzenia jest fragmentaryczna, nieformalna, intuicyjna, obfituje w hipotezy oraz niezobowiązujące skojarzenia. Matematycy próbują wszystkiego, co im przyjdzie do głowy, początkowo nie dbając o ścisłość czy dokładność. Rozpatrują różne warianty, a nawet możliwe analogie do rozważanych problemów. To jest ukryta przed nieprofesjonalistą strona matematyki – jej kulisy czy „zaplecze”. Kulisy matematyki są domeną matematyki *in statu nascendi*, czyli matematyków tworzących matematykę, dyskutujących w gabinetach lub kawiarniach³.

Kiedy „fragment” matematyki powiększa się i komplikuje, możemy go systematyzować i porządkować – dla wygody lub z powodów estetycznych. Sposobem na to jest aksjomatyzacja tego działu matematyki. Tak więc w realnej działalności matematyków aksjomatyka systemu pojawia się „na końcu”, choć w porządku logicznym jest pierwsza.

Procesu powstawania teorii nie znajdziemy w podręcznikach. Tam wszystko jest poukładane i wygładzone. Podejście podręcznikowe sugeruje, że matematyka jest dziedziną ahistoryczną, pozaczasową, w pewnym sensie nieludzką. Jest bowiem rozumiana jako działalność polegająca na wyprowadzaniu konsekwencji z aksjomatów. Natomiast relacje matematyków, ukazujących matematykę w trakcie tworzenia, przekonują, że musi być ona rozumiana jako część ludzkiej kultury, rozwijającej się historycznie i rozumiałej jedynie w tym kontekście. Oczywiście jest zdroworoządkową prawdą, iż matematyka jest przejawem ludzkiej ak-

² Cyt. za A. D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata* (tłum. z ang. P. Strzelecki), Warszawa 1998, s. 10.

³ Por. A. Dawidowicz, *Wspomnienie o Leonie Chwistku, Hugonie Steinhausie i Włodzimierzu Stożku*, w: „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria II: Wiadomości Matematyczne, XXIII 2–7 (1981), s. 238, a także w: S.M. Ulam, *Przygody matematyka*, Warszawa 1996, s. 63–66.

tywności realizowanej w społeczeństwie i rozwijającej się historycznie. Problem jednak polega na rozstrzygnięciu, czy – niezależnie od kontekstu odkrycia – „właściwa” matematyka zawiera się w podręcznikach, czy też zrozumienie jej istoty wymaga społeczno-historycznego podejścia, gdyż dopiero w takim kontekście jest ona obiektem rozsądnego opisu i analizy.

Pierwszy punkt widzenia przyjmują fundacjonistyczne filozofie matematyki. Głoszą one, iż warte refleksji filozoficznej są tylko te problemy, które zmierzają do ustalenia podstawy pewności matematyki. Ich wyróżnikiem jest to, że biorą pod uwagę w szczególności teorię mnogości i logikę oraz skupiają się na zagadnieniach rozstrzygalności teorii, niesprzeczności i zupełności systemów aksjomatycznych. Innymi słowy mówiąc – fundacjonizm wyraża się w przekonaniu, że filozofia matematyki winna dotyczyć głównie podstaw matematyki i racjonalnej rekonstrukcji teorii matematycznych, przy czym abstrahuje się od poglądów matematyków i ich rzeczywistej praktyki matematycznej.

Do tej grupy stanowisk filozofii matematyki należy platonizm. Badanie lub rozwiązywanie problemów matematycznych, nawet na poziomie elementarnym, generuje naiwny i niekrytyczny półświadomy platonizm zwykłych matematyków lub studentów. Jest to postawa prawie powszechna wśród matematyków. Jej źródłem jest rozpoznanie, że fakty matematyczne są niezależne od ich życzeń. Ten aspekt codziennego doświadczenia zajmowania się matematyką w sposób bardziej wyrafinowany wyraża platonizm matematyczny.

Stanowisko to – postulując istnienie idealnych bytów, niezależnych lub mających pierwszeństwo przed ludzką świadomością – głosi, że obiekty matematyczne są niezmiennie, pozaczasowe i pozaprzestrzenne, czyli że są niematerialne. Zgodnie z platonizmem matematyk jest podobny do odkrywcy. Nie może czegoś wymyślać, ponieważ wszystko już jest. Matematyk może tylko odkrywać. Nasza wiedza matematyczna jest obiektywna i pewna, ponieważ jest wiedzą o obiektach zewnętrznych w stosunku do nas, niezależnych od nas, które istnieją naprawdę. Ta obiektywność matematycznych obiektów czyni naukę o nich – matematykę – wyjątkową w tym sensie, że prawdy przez nią ustalone mają walor uniwersalności.

Innego typu fundacjonizmem jest formalizm. Jak na stanowisko w ramach filozofii matematyki formalizm głosi „paradoksalną” tezę, iż nie ma żadnych obiektów matematycznych. Formalistyczne podejście jest często skrótowo prezentowane przy pomocy sloganu: „Matematyka jest pozbawioną znaczeń grą na symbolach”. Matematyka składa się z formuł, czyli poprawnie zbudowanych (zgodnie z przyjętymi regułami formacji) ciągów symboli. Odpowiednie reguły transformacji mówią nam, jak otrzymuje się jedne formuły z innych. Wśród formuł wyróżniamy definicje, aksjomaty i twierdzenia. Ale formuły – powtórzmy – z czysto matematycznego punktu widzenia nie posiadają żadnego znaczenia i nie można ich klasyfikować w kategoriach prawdy bądź fałszu.

Odmienny punkt widzenia prezentują koncepcje filozoficzne matematyki, które można nazwać humanistyczno-kulturowymi. Należą do nich m.in. koncepcje Lakatosa⁴, Wildera⁵ i Hersha⁶. Bliżej omówię poglądy Hersha.

Hersh rozważa matematykę taką, jaką ją widzą profesjonaliści w trakcie pracy. Matematycy na ogół badają problemy powiązane z istniejącymi już w tradycji matematycznej. Przy ich rozpatrywaniu korzystają ze wsparcia innych matematyków, które przejawia się w standardach i procedurach akceptacji bądź odrzucania „wyników” matematycznych. Realni matematycy popełniają błędy, często nie są pewni swoich dowodów, ale dysponują systemem ocen i recenzji pozwalających je korygować. Pojawia się więc motyw możliwości obalenia w praktyce uznanych wcześniej twierdzeń. Hersh wyprowadza z tego wniosek, że w matematyce nie dysponujemy absolutną pewnością⁷.

To fundacjonizm opisuje matematykę jako wiedzę pewną i nieobalalną, ale ten pogląd nie przystaje do realnej praktyki badawczej. Aby odeprzeć fundacjonizm – sugeruje Hersh – musimy porzucić tezę o absolutnej pewności matematyki i rozwinąć humanistyczne lub społeczno-historyczne wyjaśnienia interpretujące rzeczywiste doświadczenie matematyczne, w których zawarta jest istota matematyki. Humanistyczna filozofia matematyki publikowane artykuły i traktaty rozważa jako teksty wyidealizowane, czyli takie, jakimi logicy chcieliby, żeby były, a nie takimi, jakimi one rzeczywiście są podczas powstawania. Takie podejście bliższe jest realnemu życiu matematyki niż tradycyjne fundacjonistyczne (platonizm, formalizm, logicyzm) ujęcia.

Idea „człowieczej” natury matematyki lepiej – twierdzi Hersh – oddaje jej istotę. Matematyczne obiekty tworzone są przez ludzi – nie arbitralnie – ale przez aktywny kontakt z już istniejącymi obiektami matematycznymi i przy uwzględnieniu potrzeb nauki i życia codziennego. Te obiekty są społeczno-kulturowo-historyczną realnością. Matematyka reprezentuje trzeci (poza fizycznym i duchowym) rodzaj realności – „wewnętrzny” ze względu na społeczeństwo w całości, ale „zewewnętrzny” ze względu na indywiduum⁸. Symbole używane przez matematyków są jedynie sposobem intersubiektywnego mówienia o ideach. Natomiast definicje i aksjomaty są próbą opisania głównych własności idei matematycznych.

„Ludzki” punkt wyjścia pozwala odmiennie interpretować pewne kwestie dotyczące, na przykład, dowodu, pewności czy przeciwstawienia odkrycia matematycznego – konstrukcji matematycznej. Hersh zgadza się, że prawomocne twier-

⁴ I. Lakatos, *A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics*, w: I. Lakatos, *Philosophical Papers*, t. 2, Cambridge University Press, 1978, s. 24–42.

⁵ R. L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, New York, Pergamon, 1981.

⁶ Swoją koncepcję matematyki Hersh przedstawia w: R. Hersh, *What is mathematics really?* Oxford University Press, 1997, s. 13–23.

⁷ Por. tamże, s. 47.

⁸ Por. tamże, s. 17.

dzenie matematyczne musi opierać się na uzasadnieniu nazywanym „dowodem”. Dowód jest świadectwem, że proponowany rezultat jest wyprowadzany (wynika) z aksjomatów danej teorii. Ale „wyprowadzalność” oznacza dla Hersha przekonujący argument dla wspólnoty matematyków. Jest to jawnie społeczna definicja „dowodu”, która jednakże dobrze odpowiada praktyce matematycznej.

Hersh ma także ogólną ideę widzenia problemu wielkiej przydatności matematyki w naukach przyrodniczych. Dlaczego takie obiekty jak idee matematyczne, nasze własne twory, tak często stają się użyteczne dla opisu natury? Szczegółowa odpowiedź na to pytanie jest raczej trudna, jednak – według Hersha – ogólna odpowiedź jest prosta. Matematyka jest częścią ludzkiej kultury i historii, która ma swe korzenie w naszej naturze i naszych fizycznych i biologicznych środowiskach. Nasze matematyczne idee w ogólności dopasowane są do naszego świata z tego samego powodu, dla którego nasze płuca dopasowały się do atmosfery ziemskiej⁹. (Jak widzimy Hersh powtarza znaną tezę ewolucjonizmu poznawczego Edwarda Lorenza).

Tradycyjny nurt filozofii – według Hersha – zauważa i bada jedynie „oficjalną stronę” matematyki, a nie bierze po uwagę, że matematyka ma również mniej formalną stronę, czyli swoje „zaplecze twórcze”. Ostateczna, opublikowana matematyka jest uważana za byt samoistny. Fundacjonista podobny jest do bywalca oceniającego restaurację, który nie wie, że istnieje kuchnia, lub do krytyka teatralnego, który nie wie, że istnieją kulisy¹⁰. W przypadku matematyki jest podobnie. Matematyka posiada „jasne” eksponowane oblicze oraz zaciszne (w tym sensie, że nieoficjalne) „zaplecze” pracy. Są one jej publicznym i prywatnym aspektem. „Ekspozycja” jest dostępna dla wszystkich (outsiderów), „zaplecze” jest zastrzeżone dla wtajemniczonych (insiderów, profesjonalistów). Ale – twierdzi Hersh – nie jest możliwe zrozumienie „oficjalnej” matematyki w sytuacji, gdy ignoruje się kulisy jej powstawania.

Fundacjonizm jako podejście do matematyki sprzyja – według Hersha – tworzeniu się mitów na temat matematyki. Mit nie jest zły sam w sobie. Może nieść alegoryczną czy metaforyczną moc i przez to zwiększać siłę oddziaływania matematyki. Jednak uleganie mitom nie służy zrozumieniu istoty matematyki.

Hersh wymienia cztery najbardziej ogólne mity dotyczące matematyki:

Mit Jedności: Istnieje tylko jedna matematyka, niepodzielna teraz i zawsze. Matematyka jest jedną niepodzielną całością.

Mit Uniwersalności: Matematyka, którą znamy, jest jedyną matematyką, która może istnieć. Jeżeli istnieje gdzieś inna od ludzkiej inteligencja, to nieć porozumienia może być nawiązana za pośrednictwem matematyki.

⁹ Por. tamże, s. 17.

¹⁰ Porównanie Hersha, tamże, s. 37.

Mit Pewności: Matematyka dysponuje metodą „ścisłego dowodu”, która dostarcza absolutnie pewnych konkluzji, dostarcza prawdy.

Mit Obiektywności: Prawda matematyczna jest jednakowa dla wszystkich. Nie jest ważne, kto ją bada czy rozwija. Ona jest prawdziwa niezależnie od tego, czy w ogóle ktoś ją odkrywa¹¹.

Według Hersha te mity nadają ważność i podtrzymują instytucję matematyki jako nauki. Jeżeli matematyka byłaby prezentowana w postaci takiej, jak jest tworzona, niewielu wierzyłoby, że jest ona uniwersalna, jedna, obiektywna i pewna, a ludzie chcą wierzyć w jedność, uniwersalność, pewność i obiektywność matematyki.

Uznawanie mitów jest standardem myślenia oficjalnego, ale mity nie są brane dosłownie czy też rozumiane literalnie przez profesjonalistów. Istnieje niepisane kryterium oddzielające profesjonalistów od amatorów, insiderów od outsiderów: outsider jest pod wpływem mitów, insider nie. Aby stać się profesjonalistą, należy uwzględniać nie tylko „prezentowaną oficjalnie” matematykę, ale także i jej „kulisy”. Uzyskujemy wtedy bardziej wyrafinowane podejście do mitu. Możemy się od niego zdystansować lub lepiej rozumieć przyczyny uporczywego odradzania się mitów.

Hersh poddaje krytyce (ale z pozycji obserwacji „socjologiczno-matematycznych”) te „mity”. To znaczy, że przytacza wiele sytuacji z praktyki matematycznej, które nie przystają do obrazu matematyki lansowanego przez fundacjonistów. Wspomina, na przykład, o braku porozumienia między matematykami reprezentującymi matematykę „czystą” a tymi reprezentującymi matematykę stosowaną. Przytacza też konkretne przykłady dowodów, które są dziełem „zbiorowym” i których w całości nikt nie może skontrolować – kwestionując przez to pewność matematyki.

Lecz doskonale rozumiejąc intencje Hersha, nie mogę podzielić jego sugestii, iż „prawdziwa” matematyka to matematyka tworząca się, to matematyka *in statu nascendi*. Tak naprawdę nie można obalić mitu matematyki przez jednostkowe przykłady niezgodności z „praktyką” matematyczną. Mitowi można przeciwstawić jedynie inny mit. Dlatego też krytyka Hersha jest chybiona. Nie dotyczy istoty rzeczy. Dopóki nie pojawią się inne „mity” – mit matematyki: jednej, uniwersalnej, pewnej i obiektywnej nadal obowiązuje. W końcu sam Wiles po siedmiu latach pracy „na zapleczu” matematyki zaprezentował swój dowód w postaci 200-stronicowej książki, którą przedstawił na konferencji naukowej w postaci typowo fundacjonistycznej, jako uporządkowany i spójny ciąg wywodów. Gdy pojawił się pewien problem w „oryginalnym” dowodzie Wilesa, znów wycofał się on „na zaplecze” i po pewnym czasie uzupełnił dowód. Ostateczny wynik prze-

¹¹ Por. tamże, s. 37–38.

słał do profesjonalnego czasopisma „Annals of Mathematics”, gdzie został on podany recenzji innych matematyków.

Dla odpowiedzi na pytanie, czy matematyka jest nauką, filozoficzne kwestie, tak samo jak problemy matematyczne, zasługują na uważną analizę. Mimo iż matematyka jest odmienna od tzw. nauk realnych, o naukowości matematyki świadczą to, że posiada swój przedmiot, uniwersalną metodę uzasadniania swoich tez, jaką jest dowód (we wszystkich jego postaciach); to, że tezy, które „wygłasza”, nie zależą od indywidualnych upodobań i wreszcie, że – choć jej twierdzenia w planie indywidualnym nie są bezwzględnie pewne – obiektywność i pewność jej tez jest pod kontrolą społeczności matematyków.

Two Faces of Mathematics, and Is It a Science?

With reference to certain ideas of Reuben Hersh (a creative mathematician), the paper attempts to present and confront two approaches concerning the essence of mathematics. On the one hand mathematics is presented as an inflexible stronghold of truth in which what is established is considered final. On the other hand, however, mathematics, as R. Hersh points – does not differ from other forms of scientific research; it is burdened with uncertainty and it can be modified.

Appreciating the importance of Hersh's social-mathematical observations, the author indicates that mathematics simply has two different facets. In one mathematics is a process of achieving the truth; in the other, it is a generally accepted way of presenting this truth.