

Z b i g n i e w K r ó l

Pewne problemy epistemologiczne związane z matematyką

Na wstępie¹ chcę zwrócić uwagę na historycznie ścisły związek szeregu problemów epistemologicznych i matematyki. Matematyka nie tylko uważana była za paradygmatyczny przypadek wiedzy pewnej, niezmiennej i niepodważalnej, ale także w rozważaniach epistemologicznych wielką rolę odgrywały i odgrywają nadal analizy przykładów zaczerpniętych z matematyki. Z dawniejszych filozofów wystarczy wymienić Platona i Arystotelesa, a z nowszych Kartezjusza, Leibniza, Newtona, Kanta, Bolzano, Fregego, Husserla czy Ingardena.

Czy obecnie sytuacja uległa zmianie? Czy dzisiaj matematyka może przydać się na coś epistemologii?

Spór o rolę czynników socjologicznych, kulturowych i innych uwarunkowanych historycznie w poznaniu ma swój odpowiednik w powstaniu wielu tzw. antropologizmów w filozofii matematyki². Te nowe kierunki w filozofii matematyki uwzględniają rolę podmiotu uprawiającego matematykę w tworzeniu wiedzy *stricto* matematycznej. Rozumienie w matematyce jest oparte na możliwości pomyślenia pewnego sensu w dokładnie taki sam sposób przez różne podmioty poznające. Wydaje się to możliwe i odbywa niejako automatycznie w przypadku porozumiewania się matematyków żyjących w tej samej epoce historycznej. Tymczasem „ten sam sens” okazuje się nie tyle wytworem pojedynczego aktu, lub nawet zespołu aktów świadomości, lecz jest efektem rozumienia w ramach szerszej struktury: w „horyzoncie hermeneutycznym”³. W ramach tej szerszej

¹ Artykuł powstał na podstawie wystąpienia na konferencji *Epistemologia współcześnie* (Lublin, UMCS, 7–8 listopada 2005).

² Por. Murawski 1986. Matematyka intensjonalna (por. Shapiro 1985) bada sformalizowane systemy matematyczne, np. arytmetyki liczb naturalnych czy teorii zbiorów, wzbogacone o pewne „predykaty epistemiczne” (uwzględniające faktyczne zdolności podmiotu uprawiającego matematykę) takie jak operatory modalne („ x wie, że...”, „ p jest dowodliwe” *etc.*). W wyniku tego można ustalić, czy tego rodzaju wzbogacenie środków wyrazu teorii matematycznych niesie dodatkową treść matematyczną lub jakie wnosi innowacje w stosunku do klasycznych systemów matematycznych. Termin „antropologizm” pochodzi od logika Wanga 1963 (rozdział II).

³ Na konieczność przyjęcia takiej szerszej struktury: modelu intuicyjnego, schematów pojęciowych itp., wskazuje wielu matematyków; por. np. *bezogene Existenz* (Bernays 1950), *con-*

struktury na rozumienie w matematyce mają wpływ ukryte założenia, „nieaktowe” przekonania, przed-założenia. To dzięki nim coś jest dla nas oczywiste. „Czyste” poczucie oczywistości każdorazowo opiera się na aktywnych przed-założeniach, które podlegają racjonalnej rekonstrukcji.

Aby zrozumieć tekst, np. *Elementów* Euklidesa, należy dokonać rekonstrukcji horyzontu hermeneutycznego. Jak pokazałem w książce *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona* (Król 2005), czytelnik *Elementów* w naszych czasach duże partie tekstu interpretuje i rozumie w innym modelu intuicyjnym (inne wyobrażenia, intuicje, oczywistości *etc.*) niż Teajtet z Aten (twórca X i XIII księgi). „Ten sam sens” otrzymujemy nie wprost, nagle, bezpośrednio dzięki trwaniu tzw. mitu Euklidesowego (przekonanie o niezmienności wiedzy matematycznej, przynajmniej w odniesieniu do geometrii euklidesowej), lecz w wyniku żmudnej rekonstrukcji, gdzie w punkcie wyjścia nie narzucamy swoich wyobrażeń. jakby były wieczne i niezmiennie.

Rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego wydaje się mieć jakiś sens w stosunku do matematyki w stadium przedformalnym, czyli np. względem matematyki starożytnej. A jak jest współcześnie?

Należy podkreślić zmianę sposobu postrzegania matematyki przez filozofów i naukowców. Zmiana ta została ugruntowana przez postpozytywistyczną i analityczną tradycję filozoficzną⁴, w myśl której matematyka jest jedynie (lub w zasadniczej mierze redukuje się do) niezinterpretowaną „grą językową” – rodzajem czysto formalnego rachunku, dokonywanego według ściśle podanych reguł transformacji jednych symboli, napisów w inne. Ugruntowaniu takiego obrazu sprzyja odróżnienie „bazy zewnętrznej i wewnętrznej” nauki, „kontekstu odkrycia”, „kontekstu uzasadniania” itp.⁵. Dodatkowo, tak pojęta matematyka „czysta” jest jedynie rodzajem języka nauk przyrodniczych: tworem niesamodzielnym, pozbawionym własnego odniesienia semantycznego. Niektórzy fizycy, a nawet ich większość, nabrali takiego przekonania, gdyż do niedawna, aby uprawiać fizykę, nie była konieczna znajomość teorii modeli, badającej semantykę matematyki.

Jednakże brak uwzględniania własnej, ściśle matematycznej teoriomodelowej niejednoznaczności, jaką obarczony jest sformalizowany opis obiektów matematycznych używanych przez fizykę, np. liczb naturalnych, rzeczywistych, zbiorów, jest odpowiedzialny za cały szereg trudności w poznaniu rzeczywistości fizycznej. Na przykład próby pogodzenia opisu grawitacji w ogólnej teorii

ceptual schemes, intuitive model (Mc Naughton 1954, Mc Naughton 1957). Por. też Myhill 1952, Lorenzen 1953, Lorenzen 1957, Lorenzen 1975, Hersch 1991 i np. Kreisel 1969. Po odkryciu teorii kategorii i toposów matematycy mówią także o „lokalnej matematyce”, przeciwstawiając ją dawniejszym globalnym tendencjom (takim jak – nierealizowalny – postulat jednego uniwersalnego języka dla całej matematyki); zob. np. prace F. W. Lawvera czy J. L. Bella (Bell 1986).

⁴ Lakatos 1976: 2 stwierdza, że „»formalism« is a bulwark of logical positivist philosophy”. Szersze omówienie zob. Król 2005a.

⁵ Por. np. Carnap 1983.

względności z mechaniką kwantową są związane z „uwzględnieniem” teorii modeli w fizyce (por. Król 2005a). Istnieje wtedy także możliwość wyjaśnienia pewnych kwantowo-mechanicznych paradoksów (np. EPR).

Niektórzy sądzą, że matematyka jako nauka powstała dopiero w połowie XIX wieku⁶, wraz z pojawieniem się ścisłej formalizacji. Wcześniej była zbiorem zawodnych, subiektywnych czynności. Antynomie i spory o poprawność pewnych metod dowodowych doprowadziły do zastąpienia intuicji, wyobraźni i poczucia oczywistości przez formalny rachunek. Wydaje się, że Kartezjańska „jasność i wyraźność” zostały wyparte przez konwencje i mechaniczne obliczenia. Czy na pewno?

Odpowiedź na to pytanie natychmiast okazuje się związana z szeregiem klasycznych problemów epistemologicznych takich jak związek języka i poznania, z problemem poznania bezpośredniego (spór o źródła i przedmiot poznania; idealizm, realizm/antyrealizm), problemem czynności poznawczych niedyskursywnych, sporem pomiędzy apiroryzmem i aposterioryzmem *etc.*

Nakreślony powyżej obraz matematyki, widzianej oczami postneopozytywistycznego formalisty, jest nieprawdziwy z czysto matematycznych powodów. Okazuje się bowiem, że nie jest możliwe utożsamienie matematyki z formalizmem i nie jest możliwa redukcja wszystkich czynności poznawczych w matematyce do mechanicznych procedur formalnych, a więc do pewnych faktów językowych. Ścisła formalizacja zakłada ściśle formalne zadanie języka sformalizowanego. Pojęcie „sformalizowanego języka matematycznego” jest pojęciem intensjonalnym, tzn. wiążemy z tym pojęciem nieokreślone *formalnie* (tj. niewynikające z formalnych reguł) domniemania, wyobrażenia, znaczenia i przekonania. W rzeczywistości język sformalizowany jest pewnym obiektem matematycznym, który możemy opisywać w języku algebry abstrakcyjnej, teorii zbiorów, teorii kategorii *etc.* Na przykład, z algebraicznego punktu widzenia język może być uważany za półgrupę wolną o skończonej lub nieskończonej liczbie generatorów. W teorii kategorii uzyskujemy analogiczny opis języków sformalizowanych np. w teorii monoidów lub w teorii toposów⁷. Podobnie, pojęciom intensjonalnym: interpretacji języka, zbioru *well-formed formulas* (WFF), zbioru termów, zbioru wyrażeń atomicznych, odpowiadają określone algebry abstrakcyjne⁸. To, co dla nas jest „prawdą w sensie Tarskiego”, okazuje się intensjonalnym dodatkiem do homomorfizmu jednej struktury algebraicznej w drugą. Same sformalizowane teorie matematyczne są także pewnymi algebrami abstrakcyjnymi.

⁶ Taką opinię wygłasza B. Russell (por. Russell 1901), ustalając datę „powstania” matematyki na rok 1854 (rok wydania pracy G. Boola *Laws of Thought*). Szerszą dyskusję tego stanowiska por. Lakatos 1976: 1–5.

⁷ Por. np. Fourman 1977. Okazuje się, że wiele teorii matematycznych, odpowiadające im języki i modele są toposami. Tak jest np. w przypadku teorii zbiorów Zermelo-Fraenkela. W sprawie monoidów, kategoryalnych opisów algebr wolnych i języków por. np. Mac Lane 1971.

⁸ Por. np. Rasiowa, Sikorski 1963, zwłaszcza rozdział VI.

mi. Teoria prawdy Tarskiego jest złożona z „algebraicznego szkieletu” i „otoczki intensjonalnej”, gdyż, ściśle rzecz biorąc, fakt traktowania jakiegoś homomorfizmu jako opisującego prawdziwość (=pewien homomorfizm) „języka” (=pewnej algebry) w „modelu” (=pewna inna algebra) jest faktem pozaformalnym, ponieważ jest pewnym – pochodzącym od nas (tj. od podmiotu uprawiającego matematykę) – dodatkiem, interpretacją. To my nadajemy dodatkowe, intensjonalne, znaczenie wymienionym strukturom algebraicznym. Matematyk pracuje zawsze w pewnej „intensjonalnej otoczce”, chociaż zmierza uparcie do wykrycia ekstensjonalnego „szkieletu” (istoty).

Oprócz tego, chcąc zadać ściśle formalnie język, natychmiast musimy potraktować znaki, symbole i wyrażenia tego języka jako obiekty zanurzone w pewnym metaśrodku. Chcąc zadać język, musimy także dysponować mocnymi środkami w metajęzyku. Dokładne badanie języka jako tzw. *string theory*⁹ pokazuje, że to, co uważamy za niewinne matematycznie podanie alfabetu i banalnych reguł konkatenacji, jest często równoważne podaniu arytmetyki drugiego rzędu lub nieznacznie słabszej od arytmetyki R.M. Robinson wersji arytmetyki¹⁰. Oznacza to, że na meta-poziomie musimy już wcześniej dysponować tym, co chcemy ściśle zdefiniować.

Metajęzyk jest też najczęściej silniejszy niż definiowany język. Matematycy pokazali, badając tzw. arytmetyzację składni, do jakiego momentu metajęzyk arytmetyki liczb naturalnych może być utożsamiony z językiem, w którym formułujemy arytmetykę (czyli być językiem o tej samej mocy wyrażania). Jeśli chcemy mówić o semantycznych własnościach języka arytmetyki (Peano), np. o prawdziwości jakiejś formuły, to metaśrodku musi posiadać już „z góry” bogatszą strukturę matematyczną niż ta, którą właśnie próbujemy zdefiniować. Jest to rzeczywiście „błędne koło”¹¹, które można przerwać, posługując się niesformalizowanym, czyli intuicyjnym, metaśrodkiem.

Niezmiernie interesującą i domagającą się wyjaśnienia – również epistemologicznego – sprawą jest możliwość niepodejmowania ścisłej formalizacji i zastąpienia jej użyciem intuicyjnego, nieformalnego środowiska dla uprawiania (pozornie) ściśle formalnej matematyki. Co więcej, nie istnieje żadna książka z matematyki, która byłaby napisana zgodnie z poglądem formalistów na matematykę, a zaniechanie ścisłej formalizacji nie tylko prowadzi do poprawnych rezultatów, ale ponadto jest bardziej efektywne matematycznie¹².

Zbadałem, na czym polega możliwość użycia niesformalizowanego metaśrodku. Możliwość ta opiera się na dwóch filarach: na platonizmie matematycznym i obecności „intensjonalnej otoczki”. Obecność tych filarów, przejawia-

⁹ Por. np. Corcoran, Frank, Maloney 1974.

¹⁰ Por. Grzegorzczak 2005.

¹¹ Tak o tym pisze np. A. Grzegorzczak 1981: 121.

¹² W klasycznej monografii Chang, Keislera 1973 autorzy podają (nieformalnie) zawartość intuicyjnego metaśrodku dopiero w dodatku do książki. Przykładem dążenia do maksymalnej formalizacji są np. niektóre prace G. Takeutiego dotyczące teorii zbiorów.

jąca się w *każdym* akcie uprawiania matematyki, wskazuje na fakt jej uprawiania w swoistego rodzaju *horyzoncie hermeneutycznym*. Horyzont hermeneutyczny zawiera dodatkowo tzw. ukryte założenia (lub raczej: ukryte, nieświadome i aktywnie „żywione” przekonania) dookreślające akty tworzenia matematyki¹³. W teorii prawdy Tarskiego takim ukrytym założeniem jest przekonanie o możliwości skonstruowania klasycznego metajęzyka dla języka dowolnego rzędu. Tymczasem, dla pewnych całkowicie klasycznych struktur (gładkich różniczkowych), założenie to prowadzi do sprzeczności i należy rozważać meta-środowisko intuicjonistyczne, tzn. np. bez prawa wyłączonego środka¹⁴.

Prawdziwym wyzwaniem dla epistemologii jest wyjaśnienie nie tylko istoty rozumowań intuicyjnych, gdyż, wobec powyższego, obecności takich rozumowań – nawet rozumianych tylko jako niesformalizowanych aktualnie – nie da się zaprzeczyć, ale także faktu, że matematyka historycznie mogła być tworzona jako niesformalizowana i odwołująca się do intuicji, oczywistości oraz wyobraźni.

Co jest *dane* i w jaki sposób matematykowi, że jest możliwe stworzenie np. teorii zbiorów przez R. Cantora lub napisanie *Elementów*? Dzięki czemu uczeń szkoły podstawowej może wymienić wiele własności kół, kwadratów, trójkątów (np. „średnica dzieli koło na połowy”) i podać wiele wnioskowań bez uprzedniej znajomości jakiejś sformalizowanej teorii matematycznej, np. geometrii elementarnej Tarskiego? Jak jest możliwe ustalanie przez najwybitniejszych matematyków, czym jest wielościan i kreowanie różnych teorii matematycznych opisujących wielościany, skoro nie mamy zadowalającej definicji wielościanu? Mamy tu do czynienia z analizą pojęć intuicyjnych¹⁵. Analiza taka jest historycznym i rzeczowym faktem, a współczesna formalizacja opiera się na niej i nie jest w stanie jej zastąpić. Co innego było oczywiście dla matematyka starożytnego, a co innego jest takim współcześnie. Jediną możliwością obiektywnej rekonstrukcji tego, co było oczywiście np. w starożytności, jest analiza matematyki starożytnej tak, jak jest nam dostępna w źródłach historycznych. Analiza horyzontu hermeneutycznego dla matematyki starożytnej pozwala na dokładny opis ukrytych założeń obecnych w starożytnych teoriach matematycznych. Każde takie ukryte założenie świadczy o tym, że subiektywne „poczucie oczywistości” opiera się na możliwych do racjonalnej eksplikacji zasadach. Dopiero rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego umożliwia racjonalne opisanie różnic pomiędzy matematyką starożytną¹⁶ a współczesną i jest w stanie uzasadnić obec-

¹³ Przykładem takich przekonań jest np. nieświadome używanie w niesformalizowanych rozumowaniach aksjomatu wyboru przez matematyków, którzy sami otwarcie zwalczali ten aksjomat (Lebesgue, Borel). Warto podkreślić, że Zermelo sformułował aksjomat wyboru *explicitie* właśnie w celu wyraźnego podania ukrytych założeń, aktywnych w niesformalizowanych dowodach Cantora twierdzenia o dobrym uporządkowaniu zbiorów.

¹⁴ Por. Król 2007 (w druku).

¹⁵ Por. Król 2006.

¹⁶ Por. Król 2005, Król 2006a (w druku), Król 2007a (w druku) itp.

ność historycznie przygodnych składowych wiedzy matematycznej. Odejście od modelu kumulatywnego rozwoju matematyki i nieprzydatność teorii rozwoju wiedzy naukowej, wypracowanych dla potrzeb nauk przyrodniczych, do opisu rozwoju wiedzy matematycznej¹⁷, dodatkowo wskazuje na autonomiczność zagadnień teoriopoznawczych związanych z matematyką.

Rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego w różnych epokach historycznych dostarcza racjonalnych, ścisłych przykładów zmienności historycznej pojęć matematycznych. Matematyka do swojego opisu domaga się metod hermeneutycznych, które jednak są często specyficzne i różne od metod stosowanych w humanistyce¹⁸. Matematyka dostarcza epistemologii modelowych „sytuacji epistemologicznych”, podlegających ścisłej analizie. Do takich modelowych sytuacji należą rozważania dotyczące np. roli języka w poznaniu (problem hermeneutyki tekstu matematycznego¹⁹) lub też analizujące zagadnienie: czy myślenie i świadomość redukują się do pewnych reguł algorytmicznych i mechanicznych procedur.

Współczesne dyskusje w epistemologii i dzisiejsze postacie epistemologii określają m.in. spór pomiędzy aprioryzmem a historyczno-socjologicznym naturalizmem odnośnie do źródeł wiedzy i poznania. Matematyka, tak jak jest nam dana, pokazuje, że jest możliwy i konieczny kompromis pomiędzy skrajnymi podejściami epistemologicznymi. Możliwe jest zachowanie klasycznej koncepcji epistemologii jako nauki autonomicznej, ale jednak częściowo opartej i uwzględniającej analizy konkretnych operacji poznawczych, w tym operacji poznawczych ujawniających się w naukach szczegółowych. Matematyka często sama jest swoją własną epistemologią w tym sensie, że analizy matematyczne nie są neutralne ani epistemologicznie, ani ontologicznie. Pewne stanowiska epistemologiczne są falsyfikowane przez sytuacje zbadane ściśle w matematyce.

Bibliografia

- Bell, John L. 1986. *From Absolute to Local Mathematics*. „Synthese” 69: 409–426
 Bernays, Paul. 1950. *Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit*. W: *Etudes de philosophie des sciences en hommage à F. Gonseth à l'occasion de son 60ème anniversaire*, Editions du Griffon 1950: 11–25

¹⁷ Literatura dotycząca schematów rozwoju wiedzy matematycznej nie jest tak obszerna jak literatura dotycząca zmiany teorii empirycznych. Istnieją trudności w opisie rozwoju matematyki przy pomocy teorii powstałych dla opisu rozwoju nauk przyrodniczych.

¹⁸ Por. Z. Król *Intuicja a prawda w matematyce* (maszynopis) oraz Król 2006b (w druku).

¹⁹ Por. Król 2006b, rozdział „Problem hermeneutyki tekstu matematycznego”. Teoria modeli pokazuje, że większość ściśle sformalizowanych zapisów istotnych teorii matematycznych (np. arytmetyki liczb naturalnych) nie wyznacza jednoznacznie swojej dziedziny odniesienia (tj. modelu). Oznacza to, że tzw. model zamierzony (lub standardowy) jest najczęściej tworem pozaformalnym. Sformalizowany „tekst” matematyczny domaga się matematycznej interpretacji, „pomocy z zewnątrz”, czyli wyjścia poza aktualną, formalną „grę językową”.

- Carnap, Rudolf. 1983. *The Logicist Foundations of Mathematics*. W: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Benacerraf, Paul Putnam, Hilary eds. Reprint wyd. II z 1983, Cambridge University Press 1987: 41–52
- Chang, Chen Chung., Keisler, Jerome H. 1973. *Model Theory*. North-Holland Publishing Company
- Corcoran, John, Frank, William, Maloney, Michael. 1974. *String Theory*. „Journal of Symbolic Logic” 39 (4): 625–637
- Fourman, Michael P. 1977. *The Logic of Topoi*. W: *Handbook of Mathematical Logic*. Barwise, John ed. Amsterdam, New York, Oxford. North-Holland Publishing Company: 1053–1090
- Grzegorzczuk, Andrzej. 2005. *Undecidability without Arithmatization*. „Studia Logica” 79: 163–230
- Grzegorzczuk, Andrzej. 1981. *Zarys logiki matematycznej*. Warszawa. PWN
- Hersch, Reuben. 1991. *Mathematics Has a Front and Back*. „Synthese” 88: 127–133
- Kreisel, Georg. 1969. *Informal Rigour and Completeness Proofs*. W: *Philosophy of Mathematics*. Hintikka, Jakko ed. London. Oxford University Press: 78–94
- Król, Jerzy. 2007. *Weak Main Hypo, Strong Main Hypo and the Theory – Metatheory Link* (w druku)
- Król, Zbigniew. 2005. *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona*. Złotonia k. Torunia. Wydawnictwo Rolewski
- Król, Zbigniew. 2005a. *Platonizm w matematyce a platonizm w naukach matematyczno-przyrodniczych*. „Zagadnienia Naukoznawstwa” 1 (163): 37–46
- Król, Zbigniew. 2006. *Intuicja matematyczna i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu*. „Zagadnienia Naukoznawstwa” 2: (w druku)
- Król, Zbigniew. 2006a. *Geometria starożytna i filozofia Platona*. „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki”, 2–3: (w druku)
- Król, Zbigniew. 2006b. *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*. Warszawa. Wydawnictwo IFiS PAN (w druku)
- Król, Zbigniew. 2007a. *Wstęp do starożytnych teorii proporcji*. „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 1: (w druku)
- Lakatos, Imre. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Worrall, J. Zachar, E. eds. Cambridge, London, New York, Melbourne. Cambridge University Press
- Lorenzen, Konrad. 1953. *Die ontologische und die operative Auffassung der Logik*. „Logique”: 12–18
- Lorenzen, Konrad. 1975. *Ist Mathematik eine Sprache?* „Synthese” 10: 181–186
- Lorenzen, Konrad. 1975. *Das menschliche Fundament der Mathematik*. W: *Neue Anthropologie*. Gadamer, Hans-Georg, Vogler, Peter. Stuttgart: 252–263
- Mac Lane, Saunders. 1971 *Categories for the Working Mathematician*, New York, Heidelberg, Berlin. Springer-Verlag

- Mc Naughton, Robert. 1954. *Axiomatic Systems, Conceptual Schemes, and the Consistency of Mathematical Theories*. "Philosophy of Science" 21: 44–53
- Mc Naughton, Robert. 1957. *Conceptual Schemes in Set Theory*. „Philosophical Review” 66: 66–80
- Murawski, Roman. 1986. „Humanizacja” matematyki, czyli o nowych prądach w filozofii matematyki. „Studia Filozoficzne” 8: 67–79
- Myhill, John. 1952. *Some Philosophical Implications of Mathematical Logic*. „Review of Metaphysics” 2: 165–198
- Rasiowa, Helena, Sikorski, Roman. 1963. *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa. PWN
- Russell, Bertrand. 1901. *Recent Work in the Philosophy of Mathematics*, „The International Monthly” 3: 83–101
- Shapiro, Steward. 1985. *Intensional Mathematics*. Ed. Amsterdam, New York, Oxford. North-Holland
- Wang, Hao. 1963. *A Survey of Mathematical Logic*. Amsterdam 1963. North-Holland

Some Epistemological Problems Concerning Mathematics

The article points out some mathematical facts relates to epistemology and takes them as an analogy opening a possibility of falsification of some general standpoints in theory of knowledge, such as epistemological antirealism, nominalism, etc.