

Krzysztof Wójtowicz

Filozofia matematyki J.S. Milla

Niniejszy artykuł poświęcony jest prezentacji poglądów J.St. Milla na naturę wiedzy matematycznej. Podanego przez Milla wyjaśnienia tego problemu nie można uznać za zadowalające, gdyż zasięg prowadzonych przez niego analiz był zbyt ograniczony, zaś jego propozycja – zbyt radykalna. Uważam jednak, że warto o stanowisku Milla przypomnieć – zwłaszcza w świetle faktu, że we współczesnej filozofii matematyki żywy jest nurt, w którym pobrzmiwają echa jego empirystycznej filozofii.

1. Stanowisko filozoficzne Milla

Mill jest radykalnym empirystą – i także jego wyjaśnienie statusu wiedzy matematycznej ma radykalny empirystyczny charakter. Ponieważ wszelka wiedza zakorzeniona jest w doświadczeniu i jest tworzona drogą indukcji z danych empirycznych, to także wiedza matematyczna ma swoje źródła w doświadczeniu zmysłowym. Mill uważa więc, że zdania matematyki są zdaniami syntetycznymi *a posteriori*.

Zdania matematyki nie są zatem pewne, mają za to realną treść. Czego jednak dotyczą prawdy geometrii: fizycznych przedmiotów, z jakimi mamy do czynienia na co dzień, idealnych bytów matematycznych czy też może naszych wyobrażeń? Mill jest nominalistą, odrzuca więc rozwiązanie w duchu platoizmu matematycznego. Odrzuca też pogląd, iż geometria dotyczy naszych wyobrażeń – zauważa bowiem, że nie jest możliwe utworzenie sobie dokładnych *wyobrażeń* figur geometrycznych (choć możemy operować *pojęciami*). Zdaniem Milla, nie mamy *przedstawić* figur geometrycznych, zaś ci, którzy sądzą, że jest inaczej, sądzą tak w wyniku przeświadczenia, „że gdyby takie przedstawienie nie było możliwe, to matematyka nie mogłaby istnieć jako nauka: nie byłoby trudności z wykazaniem, że takie założenie jest całkowicie bezpodstaw-

ne” [Mill 1962a: 350]. Mill twierdzi, że doktryna, jakoby geometria była nauką aprioryczną, „która opiera się na danych, jakie mają charakter czysto umysłowy, i nie ma nic do czynienia z doświadczeniem zewnętrznym” [Mill 1962a: 349], jest motywowana potrzebą utrzymania tezy o koniecznym charakterze prawd geometrycznych (a ten charakter Mill odrzuca)¹.

W swojej argumentacji Mill kwestionuje konieczny charakter prawd matematycznych, polemizując z poglądami Whewella (i osadzając swoje rozważania w ogólniejszym kontekście – dotyczącym nie tylko matematyki). W ujęciu Whewella prawdy konieczne to takie, którym niepodobna zaprzeczyć. W tym sensie Whewell nie tylko prawdy geometrii, ale także pewne twierdzenia nauk empirycznych uważał – w duchu kantowskim – za prawdy konieczne, warunkujące uprawianie wiedzy przyrodniczej². Mill zdecydowanie zaprzecza, iżby jakiegokolwiek prawdy mogły mieć taki status. Nasze przekonanie o konieczności prawd geometrii ma swoje źródło w stałym doświadczeniu. Podstawowym mechanizmem bowiem, który rządzi naszymi przekonaniem (w tym geometrycznymi), jest skojarzenie:

Gdy często byśmy widzieli dwie rzeczy razem [...], mocą pierwotnego prawa kojarzenia rośnie trudność, która w końcu może stać się niepokonalna, przedstawienia sobie tych dwóch rzeczy oddzielnie [Mill 1962a: 371].

Sam fakt, że czegoś nie możemy sobie wyobrazić, nie ma więc znaczenia, gdyż wynika właśnie z puli zebranych doświadczeń³. Mamy zatem do czynienia ze swoistym asocjacionizmem matematycznym: na zasadzie współwystępowania tworzą się pewne skojarzenia i tym samym nabieramy pewnych przeświadczeń dotyczących prawd geometrii.

Tezy matematyczne nie mają więc charakteru prawd koniecznych, sama matematyka zaś nie zajmuje się przedmiotami abstrakcyjnymi ani naszymi wyobrażeniami⁴. Musi jednak mieć jakiś przedmiot badań – gdyż na miano nauki za-

¹ „[A]żeby podtrzymać to złudzenie, trzeba koniecznie przyjąć, że prawdy te odnoszą się do przedmiotów czysto fikcyjnych i że są wyrazem ich własności” [Mill 1962a: 348].

² Mill omawia stanowisko Whewella dotyczące prawa zachowania materii, cytując następujące jego słowa: „Gdy ludzie zaczęli używać wagi w analizach chemicznych, to nie dowodzili drogą prób, lecz przyjęli jako rzecz oczywistą, że waga całości musi być łączną wagą jej elementów” [Mill 1962a: 386]. Zdaniem Milla jest to prawda empiryczna.

³ „[N]asza zdolność lub niezdolność ujmowania pojęciowego jakiejś rzeczy bardzo niewiele ma wspólnego z możliwością samej tej rzeczy...” [Mill 1962a: 370]. W innym miejscu pisze: „Jestem bowiem przekonany, że nie potrzeba nic więcej niż umiarkowanej znajomości tych praw, ażeby rozwiać złudzenie, które przypisuje swoistą konieczność naszym najwcześniejszym wnioskowi indukcyjnym z doświadczenia i które mierzy możliwość rzeczy samych w sobie ludzką zdolnością przedstawiania ich sobie” [Mill 1962a: 376].

⁴ Mill w szczególności odrzuca także rozwiązanie w duchu kantowskim, polegające na przyznaniu zdaniom matematycznym statusu zdań syntetycznych *a priori*. Byłyby to więc zdania dotyczące rzeczywistości, ale zarazem mają aprioryczny charakter. W takim ujęciu poznanie prawd matematycznych miałoby ścisły związek ze strukturą naszej percepcji. W uproszczeniu

sługuje tylko taka dyscyplina, która taki rzeczywisty przedmiot badań posiada (a matematyka z pewnością jest nauką)⁵. Mill odrzuca więc stanowisko, w myśl którego matematyka dotyczy bytów możliwych, zauważając, że istnienie np. figur geometrycznych jest po prostu sprzeczne z naszą wiedzą o wszechświecie [Mill 1962a: 349]. Warto zwrócić uwagę na to, że ten argument dotyczy pojęcia możliwości fizycznej, i Mill podejmuje problem możliwości istnienia obiektów matematycznych tylko w tym sensie pojęcia możliwości⁶. Odrzuca także stanowisko (które – dzisiejszym językiem – nazwalibyśmy stanowiskiem fikcjonalistycznym), w myśl którego matematyka dotyczy pewnych fikcyjnych bytów⁷.

Mill nie podaje żadnego argumentu, dlaczego matematyka nie mogłaby dotyczyć obiektów fikcyjnych (czy też: być po prostu fikcją), przyjmując to za całkowicie oczywiste. Faktycznie, z punktu widzenia poglądów Milla na źródła naszej wiedzy przyjęcie hipotezy, że można uprawiać naukę dotyczącą po prostu czystej fikcji, byłoby niekonsekwentne: skoro wszelka wiedza ma swoje źródło w doświadczeniu, to nie może być *wiedzy* całkowicie fikcyjnej. Przyjęcie fikcjonalistycznej koncepcji wiedzy matematycznej prowadziłoby zresztą do dalszych, poważnych trudności w systemie Milla. Jak bowiem wyjaśnić, że taka fikcyjna wiedza tak dobrze stosuje się do opisu empirycznego świata?⁸ Wariant czysto fikcjonalistyczny jest zatem nie do przyjęcia dla Milla. Jednak w jego filozofii matematyki obecne są pewne elementy takiego sposobu myślenia. Zauważmy bowiem, że Mill przyjmuje następujące założenia:

można powiedzieć, że przyroda jest matematyczna, ponieważ jako taka jest konstruowana przez poznający podmiot. Wiedza matematyczna warunkuje więc nasz opis świata – i tym samym świata tego dotyczy. Jest jednak wiedzą aprioryczną, uprzednią w stosunku do doświadczenia. Metafilozoficzne stanowisko Milla jest zdecydowanie różne od metafilozoficznego stanowiska Kanta. O ile poszukiwania Kanta można określić jako próbę opisu w fazie przednaukowej (w duchu pojmowania filozofii jako działalności o charakterze fundującym, w ramach której poszukujemy ogólnych zasad warunkujących nasze poznanie empiryczne), o tyle Milla – mówiąc dzisiejszym językiem – można byłoby określić jako konsekwentnego naturalistę.

⁵ „Skoro więc ani w naturze, ani w umyśle ludzkim nie istnieją przedmioty, dokładnie odpowiadające definicjom geometrii, i skoro nie można przecież przyjąć, że nauka ta zajmuje się rzeczami nie istniejącymi, przeto nie pozostaje nic innego, jak uważać, że geometria zajmuje się takimi liniami, kątami i figurami, jakie istnieją rzeczywiście”. [Mill 1962a: 350].

⁶ Stanowisko „modalistyczne”, w myśl którego przedmiotem matematyki jest – swobodnie mówiąc – badanie możliwości, reprezentowane jest we współczesnej filozofii matematyki. Szczegółowe prezentacje dwóch wersji tego stanowiska można znaleźć np. w pracach [Chihara 1990], [Hellman 1989].

⁷ We współczesnej filozofii matematyki takie stanowisko zajmują np. Field i Balaguer. Zdaniem Fielda, matematyka odgrywa w teoriach fizycznych rolę narzędzia, które jest wprawdzie przydatne, ale z którego można byłoby w zasadzie zrezygnować. Matematyka ma status (zbudowanej według ścisłych reguł) opowieści o fikcyjnych postaciach, która jedynie pomaga nam w opisanu rzeczywistego świata. W podobnym duchu swoją koncepcję formułuje Balaguer (por. [Field 1980], [Balaguer 1998]. Szczegółowe omówienie Czytelnik znajdzie w [Wójtowicz 2003]).

⁸ Jest to – notabene – jeden z głównych problemów, z jakimi usiłują poradzić sobie współcześni reprezentanci stanowiska fikcjonalistycznego w filozofii matematyki.

- (1) Matematyka to nauka, która ma realny przedmiot badań.
- (2) Matematyka nie dotyczy bytów idealnych ani mentalnych.
- (3) Obiekty matematyczne nie są fizycznie możliwe.
- (4) Źródłem wiedzy matematycznej jest doświadczenie.

Podane przez Milla rozwiązanie tej kwestii można określić (posługując się współczesną terminologią) jako idealizacyjną (czy: aproksymacyjną) koncepcję wiedzy geometrycznej. W myśl tej koncepcji geometria opisuje w przybliżony sposób geometryczne własności przestrzeni fizycznej. Można powiedzieć, że geometria dotyczy przestrzeni fizycznej w takim samym sensie, w jakim np. hydrodynamika dotyczy wody. Modele przepływu wody są – ściśle rzecz biorąc – fałszywe, ponieważ opierają się np. na założeniu o ciągłości ośrodka – zarazem jednak przedmiotem zainteresowania hydrodynamiki są rzeczywiste ciecze i hydrodynamika jest tworzona z myślą właśnie o opisie zachowania się cieczy. Podobnie można opisać pogląd Milla na naturę geometrii – zajmuje się ona rzeczywistymi figurami, choć opiera się na pewnych uproszczeniach (dziś powiedzielibyśmy: idealizacjach). Chociaż więc twierdzenia geometrii nie są – ściśle rzecz biorąc – prawdziwe, to jednak „nie narażamy się na żaden poważniejszy błąd w praktyce, gdy przyjmiemy fikcyjnie, że jest to prawda ścisła” [Mill 1962a: 350]. Mill jawnie porównuje wiedzę geometryczną do fizycznej czy chemicznej, argumentując, że w wypadku tych nauk również mamy do czynienia z przybliżeniami i abstrahujemy od pewnych własności badanych przedmiotów, aby skupić uwagę na innych, ważnych dla nas aspektach. Tak samo jest z geometrią⁹.

Geometria zatem ma charakter – siłą rzeczy – przybliżony. Stoi to oczywiście w sprzeczności z tradycyjnym poglądem na wiedzę matematyczną jako absolutnie pewną i absolutnie ścisłą¹⁰. W myśl koncepcji Milla status wiedzy geometrycznej jest – w zasadzie – taki sam jak status (pozostałych – chciałoby się powiedzieć) nauk przyrodniczych¹¹. Wydaje się, że dobre będzie porównanie

⁹ „Myślimy cały czas o dokładnie takich przedmiotach, jakieśmy widzieli i dotykali, ze wszystkimi własnościami, które z natury rzeczy im przynależą; ale dla naukowej wygody wyobrażamy sobie fikcyjnie, że te przedmioty obrane są z wszelkich własności, wyjąwszy te, które są istotne dla naszego celu i ze względu na które mamy zamiar rozważać te przedmioty” [Mill 1962a: 351].

¹⁰ „Szczególna ścisłość, która, jak się przyjmuje, jest charakterystyczna dla pierwszych zasad geometrii, okazuje się tedy fikcyjna. Twierdzenia, na których oparte są rozumowania tej nauki, nie odpowiadają w ani trochę większym stopniu faktom niż w innych naukach, ale my przyjmujemy, że te twierdzenia odpowiadają faktom bardziej, a to gwoi tego, by wysnuć konsekwencje, jakie wypływają z danego założenia” [Mill 1962a: 351].

¹¹ Stanowisko Milla w sprawie statusu matematyki zdecydowanie różni się jednak np. od empirystycznego stanowiska Hume’a. Hume zdaniem matematyki przypisywał status twierdzeń analitycznych (i koniecznych). Mill się na to nie godzi. „[T]en charakter konieczności, przypisywany prawdom matematyki, i nawet (z pewnymi zastrzeżeniami, jakie uczynimy później) szczególna pewność, im przypisywana, jest złudzeniem” [Mill 1962a: 348]. Nie tylko więc (wbrew Hume’owi oraz – można tu dodać – filozofom tradycji racjonalistycznej) prawdy matematyki nie są konieczne, ale nie są nawet pewne w żadnym sensie tego słowa. Można co naj-

jej do kartografii, która też zajmuje się przedstawieniem pewnych faktów o świecie. Nie twierdzimy oczywiście, że kartografia zajmuje się światami fikcyjnymi (choć można narysować mapę fikcyjnego kraju) ani że nie możemy zastosować rozumowań dedukcyjnych w kartografii. Jednak ostatecznie nasza wiedza o tym, że kartografia faktycznie dobrze działa, ma charakter indukcyjny (wiele razy udało się stworzyć mapę i z niej skorzystać), zaś sama mapa nie jest idealnie wiernym obrazem rzeczywistości, lecz dostatecznie dokładnym z punktu widzenia naszych potrzeb. Twierdzenia geometryczne należałoby więc interpretować w gruncie rzeczy jako skrótowe zapisy tego, co w (dostatecznie dobrym) przybliżeniu byłoby prawdziwe o świecie – np. twierdzenie Pitagorasa w „Millowskiej parafrazie” brzmiałoby: „Jeśli skonstruujemy figurę dostatecznie podobną do trójkąta prostokątnego oraz trzy figury dostatecznie podobne do kwadratów opartych na bokach tego trójkąta, to pole największego z nich będzie (z dostateczną dokładnością) równe sumie pól dwóch mniejszych”.

Mill swoje rozważania prowadzi na przykładzie tezy, iż dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni¹², twierdząc, iż jest to prawda, którą rozpoznajemy dzięki indukcyjnemu uogólnianiu obserwacji:

[C]o jest podstawą naszego przeświadczenia o prawdziwości aksjomatów, co jest tą oczywistą podstawą, na której one się opierają? Odpowiadam, że są one prawdami eksperymentalnymi, że są to uogólnienia na podstawie obserwacji. Twierdzenie „Dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni” albo innymi słowy: „Dwie proste, które raz się spotkały, nie spotykają się znowu, lecz stale oddalają się coraz więcej od siebie” – to zdanie jest wnioskiem indukcyjnym na podstawie danych, jakich nam dostarczają nasze zmysły [Mill 1962a: 358].

Mill odrzuca oczywiście Kantowski pogląd, w myśl którego w sposób aprioryczny postrzegamy prawdziwość takiego aksjomatu dzięki naszej konstytucji umysłowej. Źródłem tej wiedzy jest doświadczenie, zaś powszechne przekonanie o tym, że prawdy geometrii są aprioryczne i konieczne ma – zdaniem Milla – swoje źródło w tym, że takie doświadczenia są stałe, powszechne i dane nam od samego dzieciństwa: po prostu wszystkie nasze obserwacje potwierdzają tę tezę, co wywołuje złudzenie, że jest to wiedza aprioryczna¹³. Jest to jednak złudzenie, a wiedza geometryczna (dotycząca – przypomnijmy – przybliżonych własności geometrycznych przestrzeni fizycznej) ma pochodzenie indukcyjne¹⁴.

wyżej mówić o konieczności prawd matematycznych w tym sensie, że twierdzenia w logiczny sposób wynikają z przyjmowanych założeń.

¹² Chodzi o fakt, że dwie proste, które przecinają się w jednym punkcie, nie przetną się w żadnym innym – tym samym nie mogą ograniczyć żadnego obszaru przestrzeni.

¹³ Por. wcześniejsze uwagi dotyczące źródeł naszych przekonań o konieczności pewnych prawd.

¹⁴ „Ci, co posługują się tym argumentem [tj. argumentem dotyczącym nieistnienia fizycznego idealnych linii, kwadratów, kół *etc.* – K.W.], by wykazać, że aksjomatów geometrii nie można dowieść na drodze indukcji, pokazują, że sami nie znają pewnego potocznego i całkowicie

Dlaczego jednak jesteśmy w stanie nie tylko rejestrować fakty geometryczne, ale uprawiać geometrię jako naukę dedukcyjną? Mill odwołuje się tutaj do tezy o charakterze asocjacionistycznym: wrażenia dają nam „możność tworzyć [...] w myśli obrazy wszelkich możliwych zestawień linii i kątów” [Mill 1962a: 363]. To daje nam możliwość prowadzenia rozważań geometrycznych dotyczących także takich figur, które nie były nam dane w bezpośrednim doświadczeniu¹⁵. Nie ma zatem żadnej tajemnicy w tym, że geometria dostarcza nam prawdziwej wiedzy o świecie, zawierając składową dedukcyjną. Ta dedukcyjna składowa jest oczywiście bardzo pożyteczna, jednak nie prowadzi do żadnej nowej wiedzy, której nie dałoby się uzyskać na drodze poznania empirycznego¹⁶. Dedukcje w matematyce pełnią podobną rolę jak dedukcje w zoologii – to, czego możemy się dowiedzieć o zwierzętach dedukcyjnie, moglibyśmy ustalić doświadczalnie (i doświadczenie stanowi probierz wartości takiej uzasadnianej indukcyjnie tezy). Jednak zoologii nie możemy nadać charakteru nauki dedukcyjnej ze względu na fakt, że jest zbyt wiele zasad rządzących organizmami zwierząt (które to zasady należałoby skodyfikować). Natomiast podstawowych prawideł rządzących geometrią świata jest niewiele, więc geometria może przybrać postać nauki dedukcyjnej. To z kolei Mill tłumaczy tym, że wszelkie problemy geometryczne sprowadzają się do problemu wielkości – mierzenia odległości, kątów *etc.* Twierdzenia geometryczne można byłoby więc po prostu uzasadniać eksperymentalnie – przez pomiary i obserwacje, zaś składowa dedukcyjna geometrii [Mill 1962b: 213–214] w gruncie rzeczy mogłaby zostać zastąpiona przez obserwacje¹⁷. Mill

poprawnego rodzaju dowodu indukcyjnego, a mianowicie dowodu przez przybliżenia. Jakkolwiek doświadczenie nie daje nam linii tak bezsprzecznie prostych, iżby dwie takie linie nie mogły zamykać najmniejszej choćby przestrzeni, to przecież daje nam ono całą gradację linii, które mają coraz to mniejszą i mniejszą grubość i coraz mniejsze wygięcie, których to linii szeregu prosta, o jakiej mówi definicja, jest idealną granicą. I obserwacja wskazuje, że w równym stopniu i z równym przybliżeniem jak linie proste doświadczenia zbliżają się do tego, żeby nie mieć szerokości i zagięć, tak samo i w takim samym stopniu zdolność obejmowania przestrzeni przez dwie takie linie zbliża się do zera. Wniosek, że gdyby dwie takie linie w ogóle nie miały szerokości ani zagięć, to nie obejmowałyby w ogóle żadnej przestrzeni, jest poprawnym wnioskiem indukcyjnym z tych faktów, zgodnym z [...] metod[a] zmian współtowarzyszących, której to metody matematyczna koncepcja granic jest przypadkiem granicznym” [Mill 1962a: 360–361].

¹⁵ „[T]o daje nam możliwość uczynić te obrazy przedmiotem geometrycznego eksperymentowania, jak i przedmioty same rzeczywiste. Obrazy bowiem, jeśli są dostatecznie dokładne, przedstawiają wszelkie własności, jakie ujawniłyby przedmioty rzeczywiste w pewnym momencie przy prostym na nie spojrzeniu” [Mill 1962a: 363]. Nasze myślowe eksperymenty dotyczące figur geometrycznych prowadzą nas więc do takich samych wniosków, do jakich doprowadziłyby eksperymenty z rzeczywiście istniejącymi przedmiotami. Dzieje się tak dlatego, że te obrazy są wyidealizowanymi obrazami fizycznie istniejących figur.

¹⁶ „Każde twierdzenie geometrii jest prawem dotyczącym natury zewnętrznej i można by je było ustalić, uogólniając na podstawie obserwacji i eksperymentu, które w tym przypadku sprowadzały się do porównania i mierzenia” [Mill 1962b: 211].

¹⁷ W pewnym sensie podobne wątki pojawiają się przy podejmowanych współcześnie próbach nominalistycznej rekonstrukcji zmatematyzowanych teorii empirycznych. Celem jest wy-

przyjmuje więc znacznie silniejszą tezę niż tylko tezę o empirycznych *początkach* wiedzy matematycznej – jego zdaniem *wszelka* wiedza matematyczna ma czysto empiryczny charakter i – ostatecznie – może zostać zweryfikowana przez bezpośrednie doświadczenie.

Geometria jest jednym z dwóch działów matematyki, który poddaje analizie Mill. Drugim jest arytmetyka (czyli „nauka o liczbie”). Uwagi Milla na temat arytmetyki są więcej niż skromne. Utrzymane są oczywiście w duchu radykalnego empiryzmu i nominalizmu. Zdania arytmetyki nie dotyczą abstrakcyjnych przedmiotów ani też przedmiotów mentalnych, ale liczb traktowanych jako własności przedmiotów. Liczba jest zawsze liczbą *czegoś* – nie ma liczb *per se*¹⁸. Źródłem wiedzy arytmetycznej są zawsze doświadczenia, przy czym

Elementarne czy też ostateczne prawdy tej nauki to aksjomaty potoczne, dotyczące równości. A mianowicie: „rzeczy, równe tej samej rzeczy, są równe między sobą”; „rzeczy równe, dodane do równych, dają sumy równe” (zadnych innych aksjomatów nie potrzeba)... [Mill 1962b: 201].

Podstawowe prawdy arytmetyczne dotyczące liczb w gruncie rzeczy sprowadzają się do tego, jak daną liczbę można utworzyć z innych liczb (czyli są to proste stwierdzenia dotyczące prawideł liczenia). Zdaniem Milla są to prawdy empiryczne – fakt, że np. $3+4=2+5=7$ nie jest bynajmniej prawdą analityczną, ale uzasadnioną doświadczalnie prawdą na temat naszego świata fizycznego:

Wielka ogólność i odległość nie tyle od danych zmysłowych, ile od wyobraźni wzrokowej i dotykowej, praw, jakie dotyczą liczb, sprawia, iż nieco trudny jest wysiłek myśli oderwanej, potrzebny do zrozumienia, że te prawa są w rzeczywistości prawdami fizykalnymi, osiągniętymi drogą obserwacji [Mill 1962b: 210].

Stwierdziliśmy już, że empirysta Mill radykalnie różni się od empirysty Hume'a – uważa prawdy matematyczne za syntetyczne *a posteriori* (podczas gdy Hume – za analityczne *a priori*). Różni się też istotnie od empirystów z kręgu logicznego pozytywizmu, których – choć może to się wydać nieco zaskakujące – można (jeśli chodzi o wizję wiedzy matematycznej) uznać za bliższych myśli Kanta niż Milla. Dla logicznych pozytywistów matematyka ma charakter pewnego systemu konwencji, których przyjęcie jest konieczne, aby można było

kazanie, że matematyka pełni rolę użytecznego, ale w zasadzie zbędnego narzędzia. Nie prowadzi bowiem do żadnych nowych wniosków, których nie dałoby się uzyskać na drodze rozważań czysto nominalistycznych (jakościowych), jest więc nietwórcza względem teorii znominalizowanych. Posługując się tą współczesną terminologią, można powiedzieć, że – zdaniem Milla – geometria uprawiana jako nauka dedukcyjna jest nietwórcza względem teorii stanowiącej rejestrację danych „doświadczenia geometrycznego”.

¹⁸ „Co więc jest tym, co określamy mianem liczby? Oczywiście, jakaś własność, która należy do zbioru rzeczy, jaki oznaczmy tym mianem; i własnością tą jest charakterystyczny sposób, w jaki powstaje ten zbiór i jak może być rozłożony na części” [Mill 1962b: 202].

uprawiać naukę (taki charakter przypisywano również logice)¹⁹. Tworzenie wiedzy jest możliwe tylko w ramach pewnego systemu pojęć, który jest od tej wiedzy niezależny i w stosunku do niej uprzedni. Nie można w sensowny sposób mówić o punkcie widzenia spoza tego systemu, opartym na jakimś zewnętrznym w stosunku do tego systemu „punkcie Archimedesowym”. Logika i matematyka swoją szczególną pozycję zawdzięczają więc temu, że należą do tego systemu konwencji – choć oczywiście nie opisują żadnych form naoczności zmysłowej. Nie są jednoznacznie ustalone – systemów konwencji może być wiele, a ich ocena motywowana jest względami pragmatycznymi. Mill natomiast nie odwołuje się do rozróżnienia na schemat i treść poznania – dla niego prawdy matematyczne nie są prawdami o charakterze konwencyjnym, ale prawdami dotyczącymi świata.

2. Czy filozofia matematyki Milla jest rzeczywiście filozofią matematyki?

Koncepcję Milla można uznać za poprawny opis mechanizmów zdobywania wiedzy, jednak w bardzo ograniczonym zakresie. Można powiedzieć, że analizy Milla dotyczą nie tyle samej matematyki, co raczej pewnych praktycznych zasad (np. geodezji i kartografii)²⁰. Kiedy zastanawiamy się nad źródłami wiedzy dotyczącej geometrycznych aspektów badanych przez nas systemów fizycznych (np. map, planów architektonicznych, projektów urządzeń *etc.*), to można zgodzić się z tezą, że pewna część tego typu wiedzy ma charakter wiedzy praktycznej, którą można uzyskać w drodze obserwacji i uogólnień indukcyjnych²¹. Dane doświadczalne w tym przypadku będą dotyczyć np. tego, że na pewnych szkicach linie przecinają się w jednym punkcie (np. symetralne czy dwusieczne boków trójkąta²²). I w tym (ale tylko w tym) sensie analizy Milla wydają się trafne – bo rzeczywiście sztuka rysowania map, obliczenia wymiarów budynku, zaplanowania kształtu narzędzia *etc.* jest pewną umiejętnością praktyczną. Można

¹⁹ „Naszą sprawą jest nie ustanawiać zakazy, lecz dochodzić do umów. [...] W logice nie ma moralności. Każdy ma prawo budować własną logikę, tj. własną formę języka, tak jak sobie życzy. Jedyne, czego się od niego wymaga, jeśli pragnie dyskusji nad swoją logiką, to to, by sformułował jasno stosowane przez siebie metody i podał reguły syntaktyczne zamiast argumentów filozoficznych” [Carnap 1937: 78–79].

²⁰ Sam zresztą o tym pisał: „Ten plan działania stosuje się przy trygonometrycznym przeglądzie kraju...” [Mill 1962b: 215].

²¹ Pomijam tu trudności związane z faktem, że już na poziomie rejestrowania i opisu faktów korzystamy z wiedzy geometrycznej – być może więc ta uzyskana uprzednio już wiedza w pewien sposób warunkuje nasze widzenie „zjawisk geometrycznych”? Obserwacja w pewien sposób odwołuje się do już zaakceptowanej teorii – w szczególności np. wiedzy optycznej i geometrycznej.

²² Ściśle rzecz biorąc, na rysunku te linie (bo nie są to przecież proste, ale obdarzone grubością fizyczne obiekty, przypominające linię prostą) nie przecinają się w jednym punkcie (bo nic takiego w rzeczywistości nie istnieje), ale na obszarze, który jest bardzo mały (o ile rysunek został wykonany starannie). Istotnie, ten fakt można przyjąć bez dowodu – po prostu na podstawie wielokrotnych obserwacji.

sobie wyobrazić dobrego rysownika, który nie zna żadnych twierdzeń geometrycznych, ale zauważył, że symetralne przecinają się w jednym punkcie – i po wykonaniu wielu rysunków będzie przekonany, że tak być musi, niezależnie od faktu, że nie zna dowodu stosownego twierdzenia. Jednak zasięg wyjaśnień tego typu jest bardzo ograniczony – trudno wyjść poza elementarną geometrię wczesnoszkolną, zaś przy nieco bardziej złożonych problemach nasze intuicje będą zawodne: wyniki takich obserwacji będą niekiedy po prostu sprzeczne z twierdzeniami matematycznymi. Rozważmy prosty przykład, dotyczący rysowania map: znane jest twierdzenie, które mówi, że nie da się w sposób wierny odwzorować (fragmentu) kuli na płaszczyźnie²³. W praktyce tego faktu nie zauważymy i nasze obserwacje (dotyczące stosowania map w praktyce) będą nam sugerować, że mapa stanowi wierne odwzorowanie terenu. Co należy w tej sytuacji zrobić – uznać prawdziwość twierdzenia matematycznego, sprzecznego z potoczną obserwacją?

W tym prostym przykładzie koncepcji Milla można byłoby łatwo bronić przez stwierdzenie, że nasze obserwacje w tej sytuacji były obarczone błędem, zaś dokładniejsze pomiary wykażą nam, że nie jest możliwe wierne odwzorowanie powierzchni sfery na powierzchni płaskiej – i że w empiryczny sposób zyskamy przekonanie, że takie wierne odwzorowanie nie istnieje. Jednak sama trudność ma charakter ogólny i nie daje się rozwiązać przez tak proste kontrargumenty. Można podać szereg dalszych przykładów sytuacji, w których zwykłe, dostępne nam obserwacje nie będą w stanie potwierdzić prawdziwości twierdzenia matematycznego – chociażby twierdzeń dotyczących geometrii nieeuklidesowych²⁴. Teza Milla dotycząca źródeł wiedzy geometrycznej ma zastosowanie (co najwyżej) tylko w prostych przypadkach rysowania figur²⁵. Również teza o tym, że wszelka wiedza uzyskiwana w drodze dedukcji dałaby się zweryfikować doświadczalnie, jest ograniczona do najprostszych reguł rysowniczych. Mówiąc w uproszczeniu – może działać tylko w przypadku obiektów matematycznych, które mają (oczywiście przybliżone) fizyczne modele²⁶.

²³ Chodzi – mówiąc swobodnie – o to, że taka mapa to „rozprasowanie” kawałka kuli – a wtedy nieuchronnie pojawiają się problemy z wiernym oddaniem kątów i odległości.

²⁴ Geometria naszego wszechświata nie jest euklidesowa – i to możemy do pewnego stopnia eksperymentalnie stwierdzić (np. przez pomiar kątów dostatecznie dużego trójkąta). W tym sensie wiedzę na temat nieeuklidesowości naszej przestrzeni można uznać za wiedzę empiryczną, uzyskaną w drodze obserwacji. Jest to jednak w gruncie rzeczy wiedza dotycząca tego, jaki z istniejących modeli geometrycznych pasuje do naszego świata. Nie dowiemy się w ten sposób nic na temat np. twierdzeń dotyczących geometrii nieeuklidesowych różnych od geometrii wszechświata.

²⁵ Czy twierdzenie mówiące o tym, że można wypełnić linią kwadrat (krzywą Peano) jest indukcyjnym uogólnieniem danych obserwacyjnych? Z jednej strony tak – bo każdy pisak ma pewną grubość i ten kwadrat daje się zamazać – im dłużej rysujemy, tym mniej pustego miejsca zostaje... Z drugiej strony – im cieńszy pisak, tym więcej pustego miejsca zostaje... W jaki sposób należy zastosować tu kanon zmian współtowarzyszących – i jaki byłby ostateczny werdykt przy empirycznej weryfikacji tego zdania...?

²⁶ Można zrobić taki model np. dla wstęgi Möbiusa, natomiast nie da się zrobić takiego modelu dla płaszczyzny rzutowej.

Mówiąc o wiedzy geometrycznej, Mill ma więc na myśli wiedzę na temat geometrii naszej przestrzeni fizycznej. W tym sensie nie ma nic dziwnego w stwierdzeniu Milla, że o wszelkich twierdzeniach geometrycznych moglibyśmy się przekonać po prostu empirycznie, a dedukcje jedynie pozwalają nam oszczędzić trochę czasu. Gdyby doświadczenie prowadziło do innych wniosków niż dedukcja, oznaczałoby to po prostu, że w pewnym momencie nie dość starannie prowadziliśmy obserwacje (być może w fazie gromadzenia przesłanek, a być może w fazie „testowania” twierdzenia). Tej tezie nic nie można zarzucić – dopóki ograniczamy ją do opisu zestawu praktycznych reguł geometrycznych. Nie widać natomiast, jak taką tezę zastosować do wyjaśnienia tworzenia się bardziej zaawansowanych pojęć matematycznych i uprawiania bardziej zaawansowanych gałęzi matematyki. Mill tych kwestii w ogóle nie podejmuje – a przecież w czasie, kiedy publikował swój *System logiki*, znane już były geometrie nieeuklidesowe (a warto przypomnieć, że swój słynny wykład habilitacyjny, w którym wprowadził ogólne pojęcie rozmierności, Riemann wygłosił w roku 1854). Mill tego typu problematyki w ogóle nie podejmuje – można więc zasadnie twierdzić, że jego filozofia matematyki w zasadzie nie jest w ogóle próbą wyjaśnienia statusu wiedzy matematycznej, ale pewnych fragmentów tej wiedzy²⁷.

W wypadku arytmetyki sytuacja jest jeszcze bardziej niezręczna: wyjaśnienia Milla dotyczą tylko najprostszych ilościowych aspektów operacji fizycznego zestawiania przedmiotów (że na przykład grupę 7 przedmiotów można podzielić na 5+2 oraz na 3+4). Jednak nasza koncepcja liczb naturalnych z pewnością wykracza poza takie proste tożsamości (i ich uogólnienia) i trudno zaakceptować wyjaśnienia podane przez Milla²⁸.

3. Czy Mill ma następców?

Podane przez Milla wyjaśnienie statusu wiedzy matematycznej trudno uznać za zadowalające i stanowi ono łatwy cel krytyki²⁹. Chciałbym jednak zastanowić się nad tym, czy faktycznie idee Milla należy uznać za całkiem nieaktualne, czy też można mówić o kontynuatorach myśli Milla we współczesnej filozofii

²⁷ Nie czynię tu zarzutu Millowi, że nie znał idei przedstawionych w wykładzie habilitacyjnym Riemanna – prawdopodobnie nie miała o nich pojęcia zdecydowana większość matematyków. Jednak Mill jako przedmiot analiz obrał elementarne działy matematyki, ignorując fakt, że w owym czasie znany już był dość dobrze rachunek różniczkowy i całkowity, elementy geometrii różniczkowej, elementy teorii grup (np. teoria Galois) etc.

²⁸ Czy Mill zgodziłby się z twierdzeniem, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych? Jeśli tak, to czy uznałby to twierdzenie za uogólnienie indukcyjne obserwacji dotyczącej zliczania przedmiotów?

²⁹ Filozofia matematyki nie była oczywiście głównym przedmiotem zainteresowania Milla, a jego uwagi na ten temat miały na celu jedynie „wpasowanie” wiedzy matematycznej w ogólny schemat epistemologiczny przez niego przyjmowany.

matematyki. Niezależnie od niuansów terminologicznych (dotyczących interpretacji terminów „następca”, „inspiracja”, „podstawowe idee” *etc.*) skłaniam się ku odpowiedzi negatywnej – Mill nie ma bezpośrednich kontynuatorów³⁰. Należy jednak dodać, że pewne ważne wątki we współczesnej filozofii matematyki można uznać za kontynuację pewnych wątków myśli Milla – a w każdym razie można w nich zauważyć podobieństwa do sposobu myślenia Milla. Tezy Milla były bardzo radykalne (wręcz skrajne), zaś sposób uzasadnienia nieprzekonujący, natomiast sama idea zauważenia – i poniekąd dowartościowania – empirycznego czynnika wiedzy matematycznej jest we współczesnej filozofii matematyki dyskutowana nader żywo. W tej współczesnej dyskusji pojawiają się liczne wątki, które można nazwać empirystycznymi i choć nie są one oczywiście tak radykalne jak stanowisko samego Milla, to można je uznać za stanowiska pokrewne.

Kiedy mowa o filozofii matematyki utrzymanej w duchu epistemologicznego naturalizmu, należy przede wszystkim wymienić Quine’a³¹. Quine – podobnie jak Mill – odrzuca postulat fundującego charakteru „filozofii pierwszej”. Jego zdaniem analizy filozoficzne winny być prowadzone w kontekście wyników nauk szczegółowych. Naturalizm, według Quine’a, opiera się przede wszystkim na przekonaniu, że rzeczywistość jest opisywana „w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii pierwszej” [Quine 1981: 49]. Podobny charakter powinny mieć też rozważania z zakresu filozofii matematyki, uwzględniając rolę matematyki w naukach przyrodniczych.

Analizy ontologiczne Quine’a dotyczące matematyki osadzone są w kontekście rozważań dotyczących problemu zobowiązań ontologicznych teorii. Chodzi tu o problem: istnienie jakiego typu przedmiotów musimy przyjąć, jeśli uznajemy daną teorię za prawdziwą (w klasycznym, korespondencyjnym sensie – chodzi więc o realistyczną interpretację teorii naukowych)? Zauważmy bowiem, że w teoriach fizycznych w jawny sposób mówi się o przedmiotach matematycznych (funkcjach, przestrzeniach, liczbach rzeczywistych i zespolonych, operatorach *etc.*). Pojawia się problem, czy ten fakt ma jakieś znaczenie dla przyjmowanej przez nas ontologii. Quine twierdzi, że ten fakt ma znaczenie fundamentalne – i że przyjęcie realistycznej interpretacji teorii naukowych zobowiązuje nas do uznania istnienia nie tylko przedmiotów obserwowalnych, ale również obiektów teoretycznych i matematycznych. Można więc powiedzieć, że istnienie obiektów matematycznych uzasadniane jest w ten sam sposób jak istnienie dowolnego typu obiektów postulowanych w ramach teorii empirycznych. Podany przez Quine’a argument na rzecz matematycznego realizmu jest zazwyczaj określany jako argument z niezbędności (*indispensability argument*).

³⁰ Należy dodać, że idee podobne do idei Milla rozwija Kitcher (por. [Kitcher 1983]). W jednym z wywiadów przyznał jednak żartobliwie, że ponieważ Mill już nie żyje, to jest on jedynym zwolennikiem tezy o tym, że matematyka jest nauką empiryczną.

³¹ Prezentacja tutaj jest bardzo szkicowa – szczegółowy opis koncepcji Quine’a Czytelnik znajdzie np. w [Wójtowicz 2003].

Uznanie danej teorii matematycznej za teorię zinterpretowaną (czyli – prawdziwą w klasycznym sensie) uzależnione jest więc od tego, jaką rolę ta teoria odgrywa w fizyce. Punktem wyjścia wszelkich teorii (zdroworozsądkowych, naukowych, ontologicznych) są zaś dane zmysłowe. Można więc powiedzieć, że o uznaniu teorii matematycznej za teorię zinterpretowaną decyduje ostatecznie jej zgodność z wyjściowymi danymi zmysłowymi. I chociaż nie będzie to oczywiście zgodność rozumiana w tak naiwny sposób, jak postulował to Mill, to jednak ostateczne kryterium prawdy matematycznej stanowi – w tym sensie – doświadczenie³².

Również Putnam silnie akcentuje związki matematyki z fizyką, twierdząc, że analizy dotyczące roli matematyki w fizyce odgrywają ważną rolę w formowaniu się – przynajmniej niektórych – przekonań matematycznych. Źródłem wiedzy matematycznej nie jest więc jedynie czysto rozumowa analiza pojęć. Putnam twierdzi, że wpływ fizyki na matematykę jest silny i że wpływ ten będzie rósł – (współ)określając nasze decyzje dotyczące akceptacji pewnych prawd matematycznych. Oczywiście, nie będzie się to odbywać poprzez prostą zmysłową percepcję, jak chciał Mill, lecz mechanizmy tworzenia się takich matematycznych przekonań będą miały znacznie bardziej wyrafinowany charakter. Niemniej jednak empiryczna komponenta w poznaniu matematycznym jest obecna:

[B]ędziemy musieli stanąć przed faktem, że przeciwstawienie empiryczny–matematyczny jest tylko przeciwstawieniem relatywnym: większość matematyki jest także „empiryczna” w sensie mniej ścisłym i bardziej pośrednim niż zwykle stwierdzenia „empiryczne” [Putnam 1975: 264].

Matematyka i fizyka są ze sobą ściśle związane, więc Putnam dopuszcza możliwość, że

źródłem odpowiedzi na fundamentalne pytania, powiedzmy, że na temat kontinuum, będą w przyszłości nie jedynie nowe „intuicje”, ale także odkrycia fizyko-matematyczne [Putnam 1975: 264–265].

Taka odpowiedź może pojawić się przez stwierdzenie faktu, że teoria przyjmująca to twierdzenie będzie – swobodnie mówiąc – lepiej harmonizować z systemem naszej wiedzy³³.

Można więc powiedzieć, że stanowisko Putnama utrzymane jest w duchu stanowiska Milla w tym sensie, że akcentuje empiryczną komponentę wiedzy mate-

³² Prezentacja ta jest zbyt krótka, aby można było w niej choćby wspomnieć o tak ważnych aspektach argumentacji Quine’a na rzecz matematycznego realizmu jak odrzucenie dychotomii analityczne–syntetyczne, holizm semantyczny, problem formy logicznej zdań i teza o logice pierwszego rzędu *etc.*

³³ Gdy dane zdanie α jest niezależne od teorii T , to spośród dwóch niesprzecznych teorii $T+\alpha$, $T+\neg\alpha$ wybieramy taką, która lepiej stosuje się do opisu sytuacji empirycznej.

matycznej – choć oczywiście zapośredniczenie wiedzy matematycznej w wiedzy empirycznej jest znacznie bardziej subtelne, niż postulował to Mill. Prawdźwości zdania matematycznego nie będziemy mogli uzasadnić w drodze indukcyjnego uogólnienia wyników obserwacji (przypomnijmy tu przykłady Milla dotyczące przecinania się odpowiednich prostych czy sposobów tworzenia danej liczby z innych), ale jako fragment pewnego całościowego systemu przekonań, w którym matematyka odgrywa istotną rolę. Podobnie więc jak Mill, także Quine i Putnam akcentują wątki empiryczne w tworzeniu się naszych przekonań matematycznych, ale ich wyjaśnienie jest zdecydowanie bardziej wyrafinowane.

4. Uwagi końcowe

Stanowisko Milla jest bardzo radykalne, a jego wyjaśnienia – uproszczone i mające bardzo ograniczony zasięg. Trudno uznać, że Mill w zadowalający sposób wyjaśnił problem natury wiedzy matematycznej. Należy jednak dodać, że idea uwzględnienia czynnika empirycznego w tworzeniu się wiedzy matematycznej jest we współczesnej filozofii matematyki żywa. W tym sensie Milla można uznać za swoistego prekursora quasi-empirystycznego nurtu we współczesnej filozofii matematyki – i warto o jego propozycji pamiętać.

Bibliografia

- Balaguer M. [1998] *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York, Oxford
- Carnap R. [1937] *Logische Syntax der Sprache*, Wiedeń. Przekład polski: *Logiczna składnia języka*, Warszawa, PWN, 1995
- Chihara C. [1990] *Constructibility and mathematical existence*, Clarendon Press, Oxford
- Field H. [1980] *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford
- Hellman G. [1989] *Mathematics without Numbers*, Clarendon Press, Oxford
- Kitcher P. [1983] *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, New York, Oxford
- Mill J.S. [1962a] *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej. Tom I.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa
- Mill J.S. [1962b] *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej. Tom II.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa
- Putnam H. [1975] „What is mathematical truth?”, w: *Mathematics, matter and method: philosophical papers*, t.1, Cambridge University Press, s. 60–78. Przekład polski: „Czym jest prawda matematyczna?”, w: *Współczesna filozofia matematyki*, Murawski R. (red.), PWN, Warszawa 2002, s. 244–265
- Quine W.V.O. [1981] „Things and Their Place in Theories”, w: *Theories and Things*, Cambridge, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press, s. 1–23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach”, w: Szubka T. (red.): *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, TN KUL, 1995, s. 31–52
- Wójtowicz K. [2003] *Spór o istnienie w matematyce*. Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa

Philosophy of Mathematics

In this article, J.St.Mill's philosophy of mathematics is presented and discussed. First, Mill's views concerning geometry (which – in his opinion – is a general science concerning physical space) is presented. Knowledge of geometrical principles is obtained *via* inductive generalizations of our observations of physical phenomena. A short discussion follows whose conclusion is that Mill's explanation of the nature of geometrical knowledge is not satisfactory. Nevertheless, his ideas are of certain importance in the philosophy of mathematics, as Mill can be considered a predecessor of the quasi-empiricist philosophy of mathematics of Putnam and Quine.