

Zbigniew Król

## Apologia matematyki pitagorejskiej

– *Jakaż to jest niewiedza, o której mówisz?*  
– *Drogi Kleiniaszu, ja sam dowiedziałem się bardzo późno o tej obarczającej nas przypadłości i ogromnie byłem zdumiony. Wydało mi się, że rzecz taka nie licuje z godnością człowieka, lecz dla jakichś, no świń, powiedzmy, nadaje się raczej.*

[...]

– *Jakież to zagadnienia?*  
– *Dotyczące ujmowania natury 'wymierności' i 'niewymierności'. I konieczne jest myśleć o tych sprawach i z nimi się zapoznać, bo inaczej człowiek zupełnie nikczemną się stanie istotą. To więc są te zagadnienia, które trzeba sobie stawiać wzajemnie i ambitnie współzawodniczyć ze sobą w ich rozwiązywaniu. Poświęcając swój czas wolny tym tak godnym zajęciom przepędzimy go przyjemniej, niż grając w warcaby, ulubioną grę starych ludzi.*

[Platon, *Prawa*, ks. VII 819d, 820c, przeł. M. Maykowska]

*Słowa kluczowe: pitagoreizm, niewspółmierność, filozofia matematyki, historia matematyki, historia filozofii*

Historia filozofii starożytnej nie jest filologią literatury starożytnej. Badania filologiczne, bez których nie można mówić o historii filozofii, wymagają bowiem hermeneutycznego pogłębienia. Jest to konieczny warunek uprawiania historii filozofii, która jest dyscypliną filozoficzną, a nie jedynie historyczno-filologiczną. Historyk filozofii musi wyjść poza rekonstrukcję tekstu, jego edycję, translację i porównanie z innymi. Przez żmudną rekonstrukcję winien dotrzeć do jego sensu: trzeba odtworzyć ten sens, ustalając dawne sposoby jego rozumienia. Słowem, bez hermeneutyki filozoficznej, świadomej swojej *metody*, jest to niewykonalne zadanie.

Sprawy te są – mam nadzieję – oczywiste dla historyków filozofii, choć stosunkowo rzadko w Polsce traktuje się je rzeczywiście poważnie i kompetentnie. Starożytni filozofowie mieli dużą „jasność w głowie”, wyraźnie dyskutowali z innymi

filozofami, wyraźnie się różnili, nie zgadzali się z innymi, a nawet byli gotowi oddać życie w obronie prawdy, którą głosili. Ich poglądy były intelektualnie wyraziste. Dlatego nie można zadowalać się „interpretacjami”, które sprawiają wrażenie, jakby zachowane „fragmenty” były produkowane losowo przez nie do końca rozumne istoty, wieszczące w poetyckim natchnieniu wieloznaczne „strofy”. A takie wrażenie powstaje, gdyż zachowały się jedynie oderwane fragmenty zaginionych dzieł.

Na szczęście, nawet ten materiał pozwala na ujrzenie zwartego sensu, kryjącego się w pozornie oderwanych wypowiedziach. Chciałbym to pokazać na przykładzie *niektórych* wypowiedzi pitagorejczyków. Moim celem nie jest szczegółowa egzegeza poszczególnych fragmentów, lecz dostarczenie zwartej logicznie podstawy, która – w oczywisty dla mnie sposób – powinna wspierać taką egzegezę.

Metoda, która doprowadza do poniższej interpretacji, oparta jest na niewybiórczym traktowaniu źródeł pitagorejskich. Na przykład, Archytas nie jest jedynie autorem kilku zachowanych fragmentów, lecz *matematykiem*, którego matematyczna twórczość przetrwała w wielu miejscach *Elementów*, komentarzy do Euklidesa, u Boecjusza itp. Te zachowane i wydane, np. u Dielsa, fragmenty dotyczą matematycznych teorii, które da się zrekonstruować z innych źródeł. To, co wiemy, przerasta wielokrotnie – nawet objętościowo – wszystkie zachowane „fragmenty”. Podobnie jest z innymi teoriami matematycznymi wczesnych pitagorejczyków.

Oczywiście, czytelnik tych słów może posądzić mnie o skrajną niekompetencję i „wyważanie otwartych drzwi”: przecież tak, tj. uwzględniając matematykę, bada się pitagoreizm od wieków. To prawda, ale mnie chodzi o całkowicie świadomą taką *rekonstrukcję horyzontu hermeneutycznego dla matematyki starożytnej*, która z rzeczowych powodów uniemożliwia posługiwanie się współczesnymi teoriami matematycznymi, notacją współczesną, współczesnymi intuicjami matematycznymi. Tego nikt jeszcze nie dokonał w całej rozciągłości i jest to niezwykle trudne. Jednak konsekwencje *braku* wspomnianej rekonstrukcji horyzontu są porażające dla zrozumienia rzeczywistych problemów matematycznych, przed jakimi stał filozof i matematyk starożytny.

Na przykład, niewinne posłużenie się symbolem zmiennej („oznaczmy sobie bok kwadratu przez  $a$ ”) czy użycie pojęcia pierwiastka danej liczby do „wyjaśniania” teorii wielkości niewspółmiernych już zniekształcają sens starożytnych wypowiedzi matematycznych. Jeśli autor – skądinąd ważnej książki – pisze: „dowód niewymierności  $\sqrt{2}$  pojawia się w *Analitikach pierwszych* Arystotelesa”,<sup>1</sup> to nie jest to – w najmniejszym nawet stopniu – prawdą. Dalej ten sam autor

<sup>1</sup> J. Widomski, *Ontologia liczby*, Kraków 1996, s. 34, przypis 49. Wybrałem jeden przykład, ale zjawisko jest powszechne. Sprawy, o których piszę, nie przekreślają ogromnej wartości naukowej zarówno tej, jak i innych prac – i nie jest to jedynie kurtuazja z mojej strony. Jednakże tylko dzięki dyskusji i wymianie wyraźnych myśli możliwy jest postęp w badaniach.

pisze: „Przyjmujemy istnienie ułamka  $a/b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi, którego kwadrat byłby równy 2”. A tymczasem Grecy wyeliminowali ze swojej nauki o liczbach ułamki (były to raczej wielkości geometryczne lub „części” liczb naturalnych), nie znali pojęcia potęgowania liczb, nie znali liczb całkowitych ujemnych (ich pojęcie *liczby* nie jest też naszym pojęciem *liczby naturalnej*), a o ogólnej operacji pierwiastkowania liczb nie wiedzieli nic. Zamiast ułamków mieli liczbowe stosunki i teorie proporcji. Od czasu odkrycia niewymierności nie byli w stanie wyobrazić sobie, że np. każdy bok kwadratu jest liczbą, czyli, że *ma jakąś długość*, co dla nas jest zupełnie oczywiste. Ich geometria nie zawierała pojęcia nieskończonej przestrzeni, płaszczyzny, prostej, odcinka o dowolnej długości; nie potrafili zupełnie swobodnie i w sposób ciągły zmieniać „długości” odcinka; punkty w geometrii – niemetrycznej i „nieeuklidesowej” (*sic!*) – nie były częściami *continuum*, lecz powstawały jako pewne „miejsca”, tj. jako efekt określonych konstrukcji matematycznych. Dlatego nie można było wybrać dowolnego punktu z odcinka, żeby ten podzielić zupełnie dowolnie na dwa mniejsze: punkt musiał być skonstruowany, a linia dzielona w określonej proporcji, zdefiniowanej w konkretnej teorii proporcji.

Powody powstania najistotniejszych partii *Elementów*, np. ksiąg X i XIII, pozostawały zakryte między innymi wskutek nieuprawnionego użycia matematyki współczesnej do analizy matematyki starożytnej.

Jedynie ktoś zupełnie nieświadom tego, o co tu chodzi, może wzruszyć ramionami i dalej badać teksty, jakby nie miało miejsca nic istotnego. Ale można dokonać rekonstrukcji horyzontu hermeneutycznego także i dla matematyki współczesnej, ze ścisłą analizą różnic pomiędzy matematyką dawną a dzisiejszą, która pozwala dostrzec nowe problemy matematyczne o wielkim znaczeniu.

Rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego dla matematyki starożytnej umożliwia, w niektórych wypadkach, odtworzenie treści zaginionych dzieł matematycznych. Pokazałem to na przykładzie zaginionego traktatu Apolloniusza z Pergii o wielkościach niewspółmiernych. To dzieło, z którego zachował się tylko tytuł i kilka ogólnych uwag komentatorów, można odtworzyć wraz z rekonstrukcją poszczególnych definicji, lematów, twierdzeń i konstrukcji razem z ich układem i metodami dowodowymi<sup>2</sup>.

W dalszej części zamierzam pokazać kilka konsekwencji dla rozumienia nauki pitagorejczyków i jej historycznych przemian wynikających z nowego obrazu matematyki starożytnej, jaki wyłania się z rekonstrukcji jej horyzontu hermeneutycznego. Chcę skupić się na istocie tych przemian. Uzasadnienia historyczno-filologiczne zostały opublikowane gdzie indziej.

---

<sup>2</sup> Przedstawiłem to w pracy: Z. Król, *Geometria starożytna i filozofia Platona na podstawie „Komentarza Pappusa do X księgi Elementów Euklidesa”*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki”, 2–3, 2006, s. 1–25.

## Czy matematyka pitagorejska wymaga obrony?

Wystarczy zobaczyć, co o tej matematyce mówią autorzy *Filozofii przedsokratejskiej*<sup>3</sup> (por. s. 322–323), żeby – ze zdumieniem – odkryć ich całkowity brak kompetencji w tej dziedzinie. Autorzy ci negują fakt istnienia wczesnej matematyki pitagorejskiej i odkrycia w niej niewspółmierności (kto więc ją odkrył?). Autorzy ci pomijają prace O. Beckera, B.L. Van der Waerdena, O. Neugebauera i wielu innych. Nie widzą, że teorie takie jak teoria proporcji Archytasa (VIII księga *Elementów*), Teajteta czy Eudokosa nie powstają „od razu”, lecz wymagają długiego rozwoju matematyki, a rekonstrukcja wczesnej matematyki pitagorejskiej jest możliwa właśnie na podstawie tych fragmentów, które z takim uporem badają, rozumiejąc je bez metodycznie uzyskanego „klucza”: „na swój sposób”<sup>4</sup>. W ich książce wyraz „niewymierność” pojawia się tylko raz (!), a do tego użyty w niewłaściwy sposób; por. s. 332<sup>5</sup>. Nie występuje on (jako nieważny?) w indeksie rzeczowym.

Dla porównania weźmy zdumiewającą „interpretację” (por. *Filozofia przedsokratejska*, wyd. cyt., s. 323–4):

<sup>3</sup> G.S. Kirk, J.E. Ravel, M. Schofield, *Filozofia przedsokratejska*, Warszawa–Poznań 1996.

<sup>4</sup> Oto jak komentują fragment B5 *Filolaosa* (B5: „Liczba ma dwie postaci odrębne: parzystą i nieparzystą, trzecią zaś – parzysto-nieparzystą [powstała] ze zmieszania obu; każda z tych dwu postaci ma wiele form, które ujawnia w sobie każda rzecz”, przeł. J. Gajda-Krynica): „Jego słowa nawiązują chyba do Parmenidesa (np. 291 [w ich numeracji – Z.K.]), ale nie należy ich tak interpretować, że z rozmysłem twierdzi (nie wspominając o dowodzie) – wbrew eleatom – iż rozum wymaga wielości rzeczy, nie monizmu, jako niezbędnego warunku wiedzy i myśli. Filolaos zamierzał raczej uzupełnić starą teorię pitagorejczyków nowymi dowodami epistemologicznymi”. Dziwne, gdyż we fragmencie napisano wyraźnie, że różnych postaci liczb, podobnie jak rzeczy, jest wiele. Komentarz wyjaśnia więc nie to, co jest do wyjaśnienia w B5, tj. jakie to są te różne formy czy postaci liczb i dlaczego jest ich wiele. Filolaos nie pisze przecież, że liczb jest wiele, bo jest wiele rzeczy, lecz że natura każdej poszczególniej rzeczy ujawnia wielość postaci liczb. Jaka to „natura”? (Por. podane dalej w tekście wyjaśnienia).

<sup>5</sup> Grecy nie znali liczb niewymiernych. Notabene, należy wyraźnie odróżniać pojęcia niewspółmierności i niewymierności. „Niewymierność” to brak miary. Jeśli miarą jest liczba, to niewymierność oznacza brak miary liczbowej, czyli takiej, która równocześnie mierzyłaby liczby i inne rozpatrywane wielkości. Współczesne liczby niewymierne to takie (żeby wyjaśnić pochodzenie tej nazwy we współczesnej matematyce, a nie dostarczyć poprawnej definicji), które są niewymierne (niemierzalne) przez liczby naturalne. Oprócz tego posiadają one własność, że dla nieskończenie wielu par takich liczb nie istnieje wspólna ich miara. Nie przeszkadza to jednak, że dla nieskończenie wielu innych par liczb niewymiernych taka wspólna miara istnieje. Liczby wymierne („ułamki”) także nie mają jednej *wspólnej* miary, mierzącej je wszystkie naraz, ale w tym wypadku dla dowolnej pary (lub skończonej ilości) takich liczb istnieje wspólna miara. Liczby naturalne natomiast są wszystkie wspólne i mierzone przez jedną miarę – liczbę 1. Niewspółmierność oznacza więc brak wspólnej miary dwóch (lub większej, ale skończonej ilości) wielkości, tj. liczb, odcinków, figur *etc.* Nie istnieje (pomijam tu współczesne wyniki w teorii miary i ograniczam się do „tradycyjnych” wielkości) wielkość, która – rozpatrywana oddzielnie – nie posiadałaby swojej miary, np. „niewymierna” przekątna kwadratu jednostkowego jest mierzona przez swoją połowę lub  $\frac{1}{4}$  tej przekątnej itd.

Fragment 424<sup>6</sup>, według Diogenesa otwierający księgę Filolaosa, wprowadza podstawowe pojęcia i twierdzenia. Zawity wywód następnego urywka jest niejasny. Warto zauważyć, że dzieli się na część *a priori* oraz rozumowanie prawdopodobnie odwołujące się do doświadczenia. Jak się wydaje, wnioskiem z drugiej części ma być teza, że muszą istnieć zarówno rzeczy ograniczone, jak i nieograniczone oraz połączenia obu. Z części *a priori* można odpowiednio wyciągnąć wniosek, że skoro nie dzieje się tak, iż wszystkie rzeczy są albo ograniczonymi, albo nieograniczonymi, muszą istnieć również rzeczy – czyli kosmos i wszystko, co w nim istnieje – będące ich połączeniami. Takie rozumowanie dowodzi pośrednio tezy z fragmentu 424 (tylko pośrednio, gdyż „czyli” z naszej parafrazy nie ma dostatecznego uzasadnienia). Jest w tym wszystkim uderzająca sprzeczność, ale tekst jest niewątpliwie niekompletny.

Ani tutaj, ani nigdzie indziej Filolaos nie tłumaczy, dlaczego ograniczone i nieograniczone miałyby być podstawowymi pojęciami potrzebnymi do filozoficznej analizy. Nie mówi nawet, czy one są, przez co jego wywód jest niejasny.

Rzeczywiście Filolaos nigdzie tego nie tłumaczy, mówi bowiem o sprawie (o niewspółmierności), którą w jego czasach poza matematykami zajmowali się w Grecji prawie wszyscy filozofowie, nie tylko pitagorejcy.

Kolejny przykład to wielkie dzieło *Philolaus of Croton* Carla A. Huffmana<sup>7</sup>. Huffman używa terminu „niewspółmierność” tylko 3 razy (s. 10, 55 i 64). Za każdym razem tylko po to, aby stwierdzić, że jest to zagadnienie nieistotne nie tylko dla rozumienia Filolaosa, ale w ogóle dla całej filozofii pitagorejskiej. Dodatkowo podważa – na podstawie wątpliwych argumentów – całkowicie jasne świadectwa, na przykład u Arystotelesa, że dla wczesnych pitagorejczyków „wszystko jest liczbą”.

Takie stanowisko opiera się na przekonaniu, że przed *Elementami* nie było w zasadzie matematyki pitagorejskiej lub że stanowiła ona nieistotny składnik filozofii pitagorejskiej. Zdumiewająca jest także jego próba „tłumaczenia” pojęcia harmonii u Filolaosa bez elementarnej wiedzy o starożytnych teoriach proporcji.

A przecież to z odkrycia niewspółmierności wziął się podział nauk na *quadrivium* i *trivium*. Struktura czterodzielnego podziału nauk matematycznych (przejęta przez wieki późniejsze od Boecjusza) jest tłumaczona wzajemną nieredukowalnością dwóch wielkości będących przedmiotem matematyki: liczby i wielkości przestrzennych. Taki podział nauk, jak tłumaczą starannie Nikomachos z Gerazy, Teon ze Smyrny, Proklos i wielu innych (sprawdźcie to sami!), bierze się nie z naszego postanowienia, lecz z nieprzewidywalnej istoty rzeczy, z boskiej natury; por. *Theologumena Arithmeticae*, s. 3, Ast, *Introductio* I 19.14. Jest tak koniecznie, a nie dlatego, że „przyjęło się” się tak robić, bo „nie przyjęło się” robić tego inaczej. Nikomachos pisze o tym (*Introductio*) w tak samo zdecydo-

<sup>6</sup> Tj. fragment B1: „Natura w świecie została harmonijnie zestrojona z tego, co ograniczone i nieograniczone, podobnie jak cały świat i wszystko, co się w nim znajduje”; przeł. J. Gajda-Krynica.

<sup>7</sup> C.A. Huffman, *Philolaus of Croton Pythagorean and Presocratic. A Commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays*, Cambridge University Press 1993. Nie podważam natomiast w najmniejszym stopniu innych, oczywistych zalet tego dzieła.

wanych słowach, jak cytowany na początku Platon, a mądrość i filozofię uważa (*Introductio* I. 2.5) za wiedzę o tych dwóch wielkościach i ich pochodzeniu (dowód niewspółmierności), łącząc to wszystko z Pitagorasem i pitagorejczykami.

## I. Odkrycie niewspółmierności

Najstarsza teoria arytmetyczna w dziejach ludzkości złożona z twierdzeń i dowodów, a dająca się zrekonstruować z fragmentów IX księgi *Elementów* to nauka o parzystości i nieparzystości liczb. Jest ona dziełem pitagorejczyków i kilkadziesiąt lat temu została zrekonstruowana przez Oskara Beckera<sup>8</sup>. Zawierała twierdzenia typu „liczba parzysta plus liczba parzysta to liczba parzysta”, a oparta była na fundamentalnej dla pitagorejczyków własności liczb: każda liczba jest albo parzysta, albo nieparzysta. Liczba dla pitagorejczyków to była tylko (upraszczam nadmiernie sprawę, ale dla bieżących potrzeb można tak uczynić) liczba naturalna większa od 1. Najmniejszą liczbą była liczba 2, a „jedynka” nie była liczbą, lecz zasadą liczb.

Pierwsza sytuacja kryzysowa, wywołana przez odkrycie wielkości niewspółmiernych w starożytnej Grecji, powstała w wyniku konfliktu pomiędzy *explicite* sformułowanym przez pitagorejczyków przekonaniem, że „wszystko jest liczbą”, a daną sytuacją matematyczną. Dowód niewspółmierności pewnych wielkości geometrycznych, np. boku kwadratu z jego przekątną, nie był – jak obecnie często się interpretuje na podstawie rekonstrukcji opartej na tekście Arystotelesa – dowodem *nie wprost* pokazującym tylko niewspółmierność pewnych wielkości geometrycznych, lecz dowodem pokazującym istnienie przynajmniej dwóch *różnych* rodzajów wielkości w matematyce.

Rozumowanie przebiegało następująco: jeśli wszystko jest liczbą, to znaczy, że wszystko da się opisać przy pomocy liczby, a elementy i zasady liczb da się znaleźć w każdej rzeczy. Znajdowano je w całym szeregu zadziwiających – również i dzisiaj – sytuacji, z których wymienić można znane powszechnie zależności pomiędzy długościami drgających strun a wysokością i wzajemną harmonią ich dźwięków – nasze akordy, gamy, oktawy są tego efektem. Później, jak wiemy od Witruwiusza, tworzenie kanonów architektonicznych czy rzeźbiarskich także było przejawem poszukiwania „właściwych” dla piękna liczb i ich wzajemnych zależności.

Jeśli więc „wszystko jest liczbą”, to przede wszystkim jest tak w matematyce, gdzie wszystko powinno dać się opisać i wyrazić przy pomocy liczb. W szczególności wielkości geometryczne muszą dać się opisać liczbowo. W geometrii

---

<sup>8</sup> O. Becker: *Lehre vom Geradem und Ungeradem im Neunten Buch der euklidischen Elemente*. „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik”, 1936, Abt. B. 3, s. 533–553. Arytmetykę tę tworzą twierdzenia IX 21–34 i IX 36. W jednej z polskich prac (por. J. Świderek, *Rozważania matematyczne w pismach Platona*, 2002, s. 20) poświęconych filozofii i matematyce starożytnej twierdzenia te są cytowane jako „wersy” (czyli linie) tekstu *Elementów*!

powinna być zatem linia (odcinek) jednostkowa odpowiadająca „zasadzie liczb” – jedynce. Dowód niewspółmierności pokazywał, że jeśli np. bok kwadratu jest mierzony przez odcinek jednostkowy (czyli: „jeśli bok jest liczbą”), to przekątna *nie jest żadną liczbą*, tj. nie jest opisywana przez żadną liczbę. Dlaczego? Gdyż jeśli przekątna jest liczbą (lub wielkością kreśloną przez *ratio* typu „liczba do liczby”), to, skoro każda liczba jest albo parzysta, albo nieparzysta i innych liczb nie ma, musi być ona albo liczbą parzystą, albo liczbą nieparzystą. Jeśli przekątna jest liczbą, to dowodzono, że pewne liczby muszą równocześnie być nieparzyste i *vice versa* (por. tekst Arystotelesa z *Analitik pierwszych* 41a<sup>9</sup>).

Oznacza to, że nie wszystko w matematyce sprowadza się do liczb i jest przez nie opisywane. Istnieją zatem przynajmniej dwa różne rodzaje wielkości: liczby i wielkości geometryczne<sup>10</sup>.

Już na samym początku rozwoju matematyki daje się zauważyć obecność pewnej rzeczowej sytuacji (hermeneutycznej), której „zawartość” uobecnia się jako zastana i nieskonstruowana przez matematyków. Sytuacja ta okazuje się również tak dobrze określona, że jest odporna na wszelkie próby czysto formalnej manipulacji. Jest również w znacznej części niezależna od ludzkiej woli, aktów świadomości i wszelkich konstrukcji. One dokonują się raczej i są określane *implicite* przez tę sytuację. Matematyka doświadczana jest jako „dar niebios” (por. np. *Fileb* 16c), a każde poszczególne matematyczne „pojęcie” czy teoria, prócz wyrażnie i *explicite* podanych własności, posiada także dodatkowe „własności”<sup>11</sup> współdomniemywane *implicite*, nieaktowo. Te współdomniemywane własności ujawniają się czasami jako „ukryte założenia”, *tacit knowledge* itp. Wiedza matematyczna powstaje w pewnego rodzaju *horyzoncie hermeneutycznym*.

W pierwszej sytuacji kryzysowej obecność horyzontu hermeneutycznego ujawniła się w oporze matematycznych faktów uniemożliwiających redukcję matematyki do teorii liczb. Na nic by się zdało powtarzanie z uporem, że wszystko jest liczbą. Można było tylko starać się utrzymywać sprawę w tajemnicy, żeby spokojnie znaleźć jakieś rozsądne wytłumaczenie i rozwiązanie. Najważniejsze doktryny pitagorejskie aż do czasów Platona i Arystotelesa są wyznaczane przez próby uporania się z faktem niewspółmierności. Można powiedzieć więcej: zagadnienie to wyznaczało obszar badania prawie całej matematyki greckiej i miało wpływ na wiele najważniejszych teorii filozoficznych w starożytności, zwłaszcza na Platona<sup>12</sup>.

<sup>9</sup> „...przekątna kwadratu jest niewymierna z bokiem, bo gdyby się założyło, że jest wymierna, wówczas liczby nieparzyste byłyby równe parzystym”, przeł. K. Leśniak.

<sup>10</sup> Zwykle nie dostrzega się, co w rzeczywistości pokazywał dowód niewspółmierności i redukuje się jego moc dowodową do stwierdzenia braku wspólnej miary dla pewnych linii.

<sup>11</sup> Są to raczej pewne „możliwości matematyczne”.

<sup>12</sup> Na nieredukowalnej różnicy między wymiernością i niewymiernością oraz wynikającej stąd niewspółmierności bytu opiera się teoria zasad Platona; zwraca na to uwagę S. Blandzi *Platoński, projekt filozofii pierwszej*, Warszawa 2002, zob. zwłaszcza s. 313.

## II. Próby uporania się z faktem niewspółmierności

Fakt niewspółmierności pociągał za sobą wiele wniosków. Przede wszystkim oznaczał brak wspólnej miary dla wielkości geometrycznych. W przeciwieństwie do tego wszystkie liczby mają wspólną i jedyną miarą. Jest nią „jedyńska” – zasada liczb.

Zastanówmy się, co można by zrobić, aby uratować wyróżnioną pozycję liczb w świecie. *Każda* z przedstawionych poniżej odpowiedzi została rzeczywiście zaproponowana i mamy na to historyczne świadectwa.

W pierwszej kolejności można było zastanowić się, co da się zmienić w nauce o bezwzględnej parzystości i nieparzystości liczb. A gdyby tak przyjąć, że jedynka jest równocześnie parzysto-nieparzysta<sup>13</sup>? Rzeczywiście może to wyjaśnić sprawę, ale po dokładnej analizie własność jedynki, że dodana do liczby parzystej tworzy liczbę nieparzystą, a dodana do nieparzystej – parzystą, nie pozwalała – wyjąwszy kwadrat o boku jednostkowym – na usunięcie sprzeczności dowodzącej niewspółmierności dla innych przypadków. Poza tym teoria ta była tylko próbą ratowania tezy, że wszystko jest liczbą: nie była w stanie wytłumaczyć braku wspólnej miary dla boku i przekątnej.

Następne, co może przyjść do głowy, to przyjęcie *dwóch* różnych miar w geometrii. Może jeden odcinek jednostkowy mierzy boki, a drugi przekątne? Wygląda to bardzo rozsądnie i oznacza, że rzeczywistość geometryczna dałaby się opisać przy pomocy *dwóch różnych* egzemplarzy liczb, z których każdy miałby inną zasadę-jedynkę. Jedyńki te, i w konsekwencji wszystkie takie liczby, byłyby nieporównywalne (*asymbletoi*) z liczbami z innej grupy, będąc współmierne wewnątrz każdej grupy. Jednej jedynce odpowiadałby odcinek jednostkowy mierzący boki, a drugiej, niewspółmiernej z nim, odcinek jednostkowy (mógłby on być np. równy przekątnej kwadratu o boku wyznaczonym przez pierwszy odcinek jednostkowy) mierzący przekątne. Niewspółmierność oznacza przecież nie brak jakiegokolwiek miary, lecz tylko brak jednej *wspólnej* miary.

Niestety, badania Teodora pokazały, że dwa egzemplarze liczb nie wystarczą do opisu wielkości geometrycznych. Pitagorejczyk Teodor pokazał, że dla kwadratów o polach mierzonych przez kwadrat jednostkowy i odpowiadających liczbom od 1 do 17 boki są niewspółmierne nie tylko z odpowiednimi przekątnymi, ale też między sobą. Teodora „coś zatrzymało” – jak mówi Platon – na liczbie 17. Pozostawały jeszcze dwie możliwości. Jeśli dwa egzemplarze nieporównywalnych liczb nie wystarczą, to należy zbadać, czy pewna inna, ale *skończona* ich ilość wystarczy. Jako ostatnia pozostawała ewentualność, by przyjąć nieskończoną ilość takich różnych i nieporównywalnych liczb. Arystoteles pisze, że tylko ten pogląd nie znalazł żadnego zwolennika. Nie była to jednak znowu kwestia upodobań. Ostatnie dwie możliwości zostały zbadane z niezwykłą ścisłością. Cała kwestia

---

<sup>13</sup> Por. także Nikomachos, *Theol. Arith.*, s. 3 (Ast).



dotyczy w istocie problemu *ile różnych, wzajemnie niewspółmiernych rodzajów linii da się wyróżnić w geometrii*, czyli dotyczy *klasyfikacji linii niewspółmiernych*.

Muszę zaznaczyć, że od samego początku rozwoju matematyki greckiej matematyka pitagorejska była tylko fragmentem szerszej, ogólnogreckiej matematyki. I jest to następna rzecz, z której winien sobie zdawać sprawę badacz filozofii pitagorejskiej. Trzeba wiedzieć, jakie były inne szkoły w podstawach matematyki i uwzględniać dorobek innych niż pitagorejskie ośrodków matematycznych, bowiem badania tych innych ośrodków (jak u Hipokratesa z Chios – ponoć eks-pitagorejczyka) miały wpływ na teorie pitagorejskie.

Zaskakująco brzmi stwierdzenie pewnego badacza, sformułowane w pierwszym zdaniu jego artykułu<sup>14</sup>, że:

Grecką filozofię matematyki inicjują słowa pitagorejczyka Filolaosa: Wszystko dostępne poznaniu ma liczbę. Bez niej bowiem nie można niczego ogarnąć umysłem, ani poznać.

Autor tych słów opiera się prawdopodobnie na zaskakującym datowaniu lat życia Filolaosa, a przesuwającym te daty o jakieś sto lat wcześniej, trochę przed czasami Talesa z Miletu. W rzeczywistości Filolaos pisał swoje słowa, gdy już wiadano, że „nie wszystko jest liczbą”, a opis liczbowy rzeczywistości próbowano osiągnąć przez określone teorie proporcji i rozważanie wielości egzemplarzy liczb. Filolaos nie pisał więc o „jednym rodzaju liczb” (por. cytowany już powyżej, w przypisie 4, fragment B5), jak się powszechnie przypuszcza, i nie nawiązywał do pierwotnej sytuacji w filozofii matematyki. Wiadomo przecież, że oprócz liczb przyjął także inne zasady rzeczywistości („ograniczone i nieograniczone”) i o „zasadach” pisał w liczbie mnogiej. Wszystko to jest konsekwencją odkrycia niewspółmierności, gdyż brak jednej miary w geometrii powodował brak granicy (*peras*) w dziedzinie geometrycznej. Z tego samego powodu Archytas głosił już wyraźnie obecność *dwóch* zasad (liczba i wielkość przestrzenna – jak trafnie uzupełnia tekst Diels na podstawie całkowicie jasnego kontekstu, w którym ocalały fragmenty). Słowa Filolaosa, jako niedotyczące jednego egzemplarza liczb, zwłaszcza w sensie ideowym, a nie tylko chronologicznym, nie inicjują całej problematyki, bo nie nawiązują już do pierwotnej koncepcji pitagorejskiej. Filolaos pisał też o jedynce, zasadzie liczb jako „parzysto-nieparzystej”, a rozważenie różnych egzemplarzy liczb pozwalało mu zamiennie używać terminów *hen* (zasada liczb) i *monas* (zasada „tego, co przestrzenne”). Ta zamiennność (obecna także u Archytasa) wskazuje na pitagorejskie próby wytworzenia przestrzenności z punktów geometrycznych i liczb (por. niżej).

Problemy matematyczno-filozoficzne podniesione przez pitagorejczyków były badane nie tylko przez nich, a osiągnane wyniki wpływały na rozwój filozofii

---

<sup>14</sup> Zob. B. Dembiński, *Status ontologiczny liczby w wybranych systemach filozofii greckiej*, „Studia Antyczne i Mediewistyczne” nr 3, 2005, s. 19.

pitagorejskiej. Tak było właśnie z klasyfikacją linii niewspółmiernych rozpoczętą przez Teajteta i Demokryta, a rozwijaną przez Euklidesa, Eudoksosa i Apolloniusza z Perga.

Teajtet, nie będąc pitagorejczykiem, mógł spojrzeć na problem trochę inaczej. Zauważył on, że niewspółmierność nie dotyczy tylko linii, lecz także figur płaskich i brył. Wymyślił, że linia (dla nas odcinek) może nie być sama wyrażana i mierzona przez liczbę, czyli być *liniowo niewspółmierna* z linią jednostkową, a jednak być określona liczbowo. Jak to możliwe? A jeśli przyjąć, że jest ona bokiem kwadratu z obszarem o mierze – coś podobnego do naszego „pola” figury – wyrażającej się liczbą? Na przykład, kwadrat zbudowany na niewspółmiernej z jednostkowym odcinkiem przekątnej kwadratu jednostkowego ma „pole” mierzone przez kwadrat o boku równym linii jednostkowej – dzisiejszy kwadrat o boku równym  $\sqrt{2}$ , ma pole równe  $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ . Teajtet zdefiniował więc linie *racjonalne*, jako złożone z dwóch grup linii: linie współmierne liniowo z odcinkiem jednostkowym oraz linie będące bokami tych kwadratów, które mają pole mierzone przez *kwadrat* jednostkowy.

Dzięki tej dziś bardzo dziwnej definicji niektóre niewymierne przekątne zachowywały swój ścisły związek z liczbą, jako pochodzące z określonych liczbowo kwadratów<sup>15</sup>. Dla potrzeb swojej teorii Teajtet rozwinął całkowicie nową teorię proporcji umożliwiającą budowanie linii i figur płaskich pozostających do siebie w *ratio* „jak liczba do liczby”. Z dialogu Platona *Teajtet* wiemy, że matematyk ten rozszerzył swą definicję także na bryły. Łatwo domyślić się, że były to bryły mierzone przez sześcian jednostkowy.

Przyjmując jedną linię wyróżnioną – najwyższą miarę, odpowiadającą jedynce – Teajtet pokazał niesłuchanie złożonymi i doskonałymi z logicznego punktu widzenia metodami, że istnieje nieograniczona liczba typów linii niewspółmiernych. Oznacza to, że aby opisać liczbowo rzeczywistość geometryczną, trzeba by przyjąć w geometrii nieskończoną liczbę różnych i wzajemnie niewspółmiernych miar. Równoważnie: do opisu tworów geometrycznych trzeba użyć nieskończonej ilości różnych egzemplarzy liczb naturalnych. Geometria nie da się więc zredukować do arytmetyki. Na przyjęcie nieskończonej ilości nieporównywalnych monad-jednostek – jak wiemy od Arystotelesa (por. *Met.* 1080b) – nikt nie chciał się zgodzić. Nie było rady – istniały dwie różne zasady matematyki i rzeczywistości. Klasyfikacja wielkości niewspółmiernych Teajteta zachowała się w X i XIII księdze *Elementów*. Teoria ta wzbudza podziw swoją matematyczną pomysłowością, precyzją, konsekwencją i rozmachem.

---

<sup>15</sup> „Dziwność” polega na tym, że matematyk współczesny, chcąc opisać, które figury mają boki określone przez liczby (względem wybranej jednostki), skonstruowałby i użył liczb wymiernych. Teajtet natomiast posłużył się dość egzotycznym tworem: liczbami naturalnymi i wymiernymi, rozszerzonymi o „pierwiastki kwadratowe” z liczb naturalnych. Była to więc grupa liczb zawierająca także (niektóre) współczesne liczby niewymierne.

Oczywiście, można jeszcze rozważać inne możliwości odejścia od nauki o ścisłej parzystości i nieparzystości liczb. Na przykład można rozpatrywać, czy w *jednym egzemplarzu liczb* jednostki w poszczególnych liczbach są nieporównywalne. Liczby wtedy nie musiałyby być wszystkie współmierne. Możliwość taka jest ciekawa teoretycznie, ale nie tłumaczy całkowicie faktu niewspółmierności, a cała ta teoria „tonie” w aporiach.

O tych wszystkich możliwościach wspomina tekst Arystotelesa z *Metafizyki* M 1080a. Arystoteles nie wyjaśnia jednak, *dlaczego* rozważano takie warianty pojmowania liczby.

W wyniku odkrycia niewymierności zbadano, jak można uniknąć faktu niewspółmierności lub zachować wyróżnioną pozycję liczb w wyjaśnianiu świata i matematyki. Oprócz już wymienionych nie można nie wspomnieć o jeszcze jednej próbie, jaką były starożytne teorie proporcji<sup>16</sup>.

Mają one związek z naukami dotyczącymi *harmonii* u pitagorejczyków. Wielkości mogą być – jak już wspomniałem – niewspółmierne pomiędzy sobą, ale w poszczególnych grupach pozostawać do siebie wzajemnie jak „liczba do liczby”. Gdyby udało się zbudować teorię pozwalającą porównywać poszczególne grupy pomiędzy sobą, to na „nieokreślone” tworzywo nałożona zostałaby pewna regularność i miara. Teorii takiej, pomimo niesłychanych wysiłków, nie udało się zbudować w starożytności. Nie jest nią także tzw. teoria proporcji Eudoksosa, zachowana w V księdze *Elementów*. Najbardziej zgodną z ideami pitagorejskimi była wymieniona już teoria proporcji Teajteta.

Sprawy teorii proporcji są związane ze specyficznym pojęciem *liczby jako miary* u pitagorejczyków i *nakładaniem miary*<sup>17</sup>; por. Z. Król, *Platon i podstawy matematyki współczesnej...*, wyd. cyt. s. 49–54.

Trzecią grupę badań matematycznych związanych z niewspółmiernością, prócz teorii proporcji i manipulacji jednostkami w liczbach, tworzyły badania nad *continuum*. Dotyczyły one problemu: „jak liczba może wytworzyć coś przestrzennego?”. Badania te mogły rozwijać się niezależnie od odkrycia niewspółmierności. O ile w przypadku geometrycznej miary jedynie arytmetycznej przyporządkowywano odcinek jednostkowy, to w tej grupie badań jedynka utożsamiana była z pojedynczym punktem. Rozważany problem miał więc równoważne sformułowanie: „jak z punktów wytworzyć przestrzenność?”. Teorie liczb-punktów, arytmetyka kamyczków (*psephoi*), twierdzenia gnomiczne i mnóstwo fragmentów

---

<sup>16</sup> Por. Z. Król, *Starożytne teorie proporcji*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki PAN” nr 1, 2007.

<sup>17</sup> Por. też Nikomachos z Gerazy, *Introductio* I 23.4–5. Teksty źródłowe potwierdzałyby, że pojęcie proporcji jest wtórne względem podstawowego pojęcia liczby, co przeczy teorii liczb idealnych u Platona sformułowanej przez Töplitza i z entuzjazmem przejętej przez wielu badaczy, (por. O. Töplitz: *Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon*, „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik” 1931, Abt. B.1, s. 3–33).

dotyczących pitagorejczyków nawiązuje do tych badań. W rezultacie szczegółowych badań i aporii Zenona z Elei matematycy zdecydowali się wykluczyć punkty jako części składowe *continuum*. Punkt nie jest w stanie wytworzyć przestrzenności i w *Elementach* punkty nie są wyjściowymi „cegiełkami” ani zasadami geometrii. Geometria w *Elementach*, zwłaszcza ta w X księdze, budowana jest na podstawie przyjęcia tylko jednego odcinka (linii podstawowej, „najwyższej miary”) wraz z zestawem dozwolonych operacji, jakich można dokonywać na tej linii. W *Elementach* są to tylko tzw. konstrukcje z udziałem cyrkla i linijki, wymyślone przez Platona. Pitagorejczycy, np. Archytas, stosowali znacznie więcej konstrukcji (*epharμοζειν, neusis*).

Arytmetyzacja *continuum*, osiągnięta w wyniku zastąpienia niejasnych pojęć „wielkości ciągłej”, „nieskończenie małej” *etc.* przez (zdefiniowane dla punktów) pojęcia granicy ciągu, zbieżności itp. (Cauchy, Weierstrass), a następnie definicja liczb rzeczywistych oparta na „zasadzie ciągłości” (Dedekind) oraz opis geometrii linii prostej, płaszczyzny i przestrzeni przy pomocy liczb rzeczywistych (Cantor) należą już do najnowszych dziejów matematyki i były nieznane oraz niemożliwe do przeprowadzenia w starożytności.

Warto w tym miejscu także dodać, że – podobnie jak w starożytności – rozważenie „różnych egzemplarzy liczb” (czyli rozpatrywanie modeli, gdzie mieszanu ulegają tzw. początkowe sekwencje modeli) jest podejmowane w teoriach kwantowej grawitacji i przybliża nas do – poszukiwanej obecnie i analogicznej do starożytnej uniwersalnej teorii proporcji – jednolitej teorii rzeczywistości, likwidującej rozdział pomiędzy ogólną teorią względności i mechaniką kwantową.

### III. Schemat rozwoju doktryn pitagorejskich na podstawie stanu badań matematycznych w starożytności

Na początku, we wczesnym pitagoreizmie, przekazy informują nas o jednej zasadzie rzeczywistości – liczbie. Po odkryciu faktu niewspółmierności najpierw próbowano różnych prostych wybiegów teoretycznych. Jednym z nich była nauka o równoczesnej parzystości i nieparzystości jedynki lub liczb. Gdy okazało się, że w matematyce są dwa rodzaje nieredukowalnych wzajemnie wielkości, pojawiają się teorie, takie jak Filolaosa czy Archytasa, przyjmujące oprócz liczby jeszcze inne zasady. Oczywiście, odpowiedź, czym jest ta inna nieliczbowa zasada rzeczywistości, była specyficzna u poszczególnych myślicieli. U Archytasa mamy już całkowite zespolenie nauki o harmonii z matematycznymi badaniami nad teoriami proporcji<sup>18</sup>.

<sup>18</sup> Pomijam w tym miejscu wyjaśnienie historycznego faktu związania klasyfikacji wielkości niewspółmiernych z teoriami proporcji. Zaznaczę tylko, że poszczególne typy linii niewspółmiernych da się zdefiniować jako odpowiednie linie proporcjonalne do linii *rational*; por. Z. Król, *Geometria*

Czemuż to po odkryciu niewspółmierności Filolaos uczy o „ograniczonym i nieograniczonym” jako zasadach rzeczywistości? Ograniczone odpowiada temu, co ma miarę, jest ilością skończoną, mierzalną i policzalną – czyli odpowiada liczbie. Nieograniczone – to wszystko pozbawione miary (także *jednej wspólnej* miary), nieopisywalne przez liczbę, nieokreślone liczbowo – a takimi okazały się wielkości „przestrzenne”, geometryczne. To wskazówka, że w czasach Filolaosa brak odpowiedniej teorii proporcji, mogącej nałożyć taką wspólną miarę na wielkości geometryczne (tj. na brak teorii proporcji, które oznaczam jako T\_4, T\_5 i T\_6<sup>19</sup>).

Nie sposób nie zauważyć, że wewnętrzna logika rozwoju pitagoreizmu jest wyznaczona przez rzeczowe czynniki matematyczne. Ogólny wniosek jest następujący: wiele najistotniejszych wczesnych fragmentów pitagorejskich nawiązuje do wymienionych powyżej badań i zagadnień matematycznych. Nie można ich więc poprawnie i w pełni zrozumieć bez znajomości matematyki starożytnej. Ponadto, chronologia rozwoju teorii matematycznych może pomóc w ustaleniu chronologii zachowanych fragmentów, a chronologia fragmentów umożliwia także datowanie niektórych teorii matematycznych. Przez „chronologię rozwoju teorii matematycznych” rozumiem nie tylko chronologię ustalaną metodami historycznymi, ale przede wszystkim chronologię wynikającą z zależności logicznych pomiędzy – odpowiednio rekonstruowanymi – teoriami. Można bowiem ściśle ustalać, które teorie matematyczne, a nawet tylko pojedyncze pojęcia czy twierdzenia, musiały pojawić się wcześniej od innych teorii, twierdzeń i pojęć zależnych od nich rzeczowo i logicznie<sup>20</sup>.

Warto dodać, że podobieństwo nauki Platona o najwyższych zasadach do doktryn pitagorejskich jest raczej powierzchowne. Odpowiedź Platona na fakt niewspółmierności jest *istotnie inna*. Użycie tego samego greckiego terminu na określenie proporcji w najmniejszym nawet stopniu nie wskazuje, że termin ten oznacza to samo w różnych teoriach proporcji. Podobnie jest z terminami liczba, jedność, granica u pitagorejczyków i Platona. Często oskarża się Platona o zapożyczenia pitagorejskich teorii. Tymczasem to raczej neopitagoreizm zapożycza teorie Platona i Arystotelesa. Tak jest np. z platońskim pojęciem *uczestnictwa* (por. np. początkowe partie *Introductio* Nikomachosa). Natomiast wcześniej pewne osiągnięcia pitagorejczyków, z których największym jest odkrycie niewspółmierności, stały się ogólnogreckim dobrem i jako całkowicie niezależne

---

*starożytna i filozofia Platona...*, wyd. cyt. Była to próba „opanowania” niewspółmierności i nałożenia na nią miary, harmonii.

<sup>19</sup> Por. Z. Król, *Wstęp do starożytnych teorii proporcji*, wyd. cyt.

<sup>20</sup> Przykładowo, do prezentacji liczb w *Elementach* używa się ciągłych odcinków, nawet w miejscach, gdzie omawia się twierdzenia uzyskane metodami „arytmetyki kamyczków”. Stało się to możliwe po powstaniu teorii proporcji Teajteta i Eudoksosa. Znając te teorie, można ustalić, co w twierdzeniach pochodzi z czasów dawniejszych, a co z czasów Platona i Euklidesa.

od zmiennego kontekstu filozoficznego były wyjaśniane przez większość szkół filozoficznych i matematycznych. Odkrycie istnienia dwóch rodzajów wielkości wraz z ich cechami charakterystycznymi: określonością i nieokreślonością, podzielnością i niepodzielnością itp. – należało do takich ogólnogreckich dóbr.

Bez tego nie da się pojąć, dlaczego *Fileb* Platona, a więc dialog o przyjemności, stanowi część debaty nad teorią proporcji Eudoksosa, która tłumaczy przekazy dotyczące filozoficznego dorobku myśliciela z Knidos<sup>21</sup>. Platon, w przeciwieństwie do Eudoksosa, podkreślał niezbywalną rolę Jedności w konstytucji rzeczy.

Starożytne teorie proporcji w matematyce można było stosować nie tylko do liczb i wielkości geometrycznych<sup>22</sup>. Obowiązywały one także w innych dziedzinach: przy pomiarach czasu, w rozważaniach etycznych itp. Na przykład, wszystko, czego mogło być „więcej i mniej” (np. przyjemności, ciepło), dało się opisać przez odpowiednie proporcje.

Nauka o parzystości i nieparzystości liczb oparta była na niepodzielności jedynki – zasady liczb. Gdyby jedność była podzielna, to liczby parzyste nie różniłyby się niczym od liczb nieparzystych! Tłumaczy to, dlaczego liczby parzyste są związane z nieokreślonością, a nieparzyste z określonością: na przeszkodzie podziału na połowy liczb nieparzystych stoi absolutnie niepodzielna jedność<sup>23</sup>. Gotowość na podziały w nieskończoność charakteryzuje wielkości geometryczne; por. *Komentarz Pappusa do X księgi „Elementów” Euklidesa*, *Introductio* Nikomachosa z Gerazy, pisma Teona ze Smyrny i *Komentarz* Proklosa<sup>24</sup>.

Odkrycie niewspółmierności określiło zakres badań i kształt większości starożytnych teorii matematycznych. Przykładowo, wystarczy zobaczyć, ile miejsca poświęcano (Nikomachos, Teon, arytmetyczne księgi *Elementów*) zagadnieniu: kiedy jedna liczba mierzy inną oraz kiedy liczby są mierzone przez inną liczbę. Świadczy o tym także podział liczb w arytmetyce na rodzaje. Nie sposób wytłumaczyć *dlaczego* zajmowano się takimi sprawami bez odwołania do poszukiwania liczbowego opisu wielkości przestrzennych.

Matematyczne odkrycie niewspółmierności było prawdziwie religijnym doznaniem dla Greków. Był to fakt niesprowadzalny do żadnej sofistycznej konwencji,

<sup>21</sup> Eudoksos uczył o tym, czego „więcej i mniej”, a więc mówił też o tym, co „ograniczone i nieograniczone”, ale to nie oznacza przecież, że był pitagorejczykiem czy platonikiem.

<sup>22</sup> Por. np. Nikomachos z Gerazy, *Introductio* I 14.1–2, Arystoteles *Eth. Nic.* II 6. 1106b, etc.

<sup>23</sup> Zwykle tłumaczy się to, przedstawiając rysunek pokazujący w dwóch równoległych szeregach monady, gdzie w przypadku liczby nieparzystej pozostaje jedna „kropka” na środku. Tymczasem, znamy tłumaczenia tego zagadnienia (np. u Nikomachosa z Gerazy, *Introductio* I 7, I 8) wyjaśniające to zagadnienie bezpośrednio niepodzielnością jedynki i operujące szeregami monad ustawionymi jeden za drugim. Podstawowa jest tu zdolność liczby parzystej do posiadania części równych. Liczba nieparzysta może być dzielona tylko na części różne.

<sup>24</sup> Warto przypomnieć, że wszystkie te dzieła jednoznacznie odróżniają liczby od wielkości geometrycznych i z tego rozróżnienia wyprowadzają podział nauk matematycznych. Wszystko to jest skutkiem odkrycia niewspółmierności, a więc wynika z istoty rzeczy, a nie z przekazów i lektury.

fakt, z którym należało się pogodzić i którego nie można było zmienić. Grecy znaleźli niezbity, porażający dowód bipolarności (*diadyczności*) świata, a „parzyste i nieparzyste”, „współmierne i niewspółmierne” były tak samo przeciwstawne jak „dobre i złe”, „jasne i ciemne” czy „męskie i żeńskie”. Dlatego niewspółmierność wymieniana jest wśród rzeczy budzących największe zdumienie – i to przez Filozofa, dla którego ze zdziwienia rodzi się filozofia.

### Bibliografia

- Arystotele *Eth. Nic.* II 6. 1106b.
- Becker, O. 1936. *Lehre vom Geradem und Ungeradem im Neunten Buch der euklidischen Elemente*, „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik”, Abt. B. 3.
- Blandzi, S. 2002. *Platoński projekt filozofii pierwszej*, „Studia z filozofii systematycznej” t. 3, Warszawa.
- Dembiński, B. 2005. *Status ontologiczny liczby w wybranych systemach filozofii greckiej*, „Studia Antyczne i Mediewistyczne” nr 3 [38].
- Huffman, C.A. 1993. *Philolaus of Croton Pythagorean and Presocratic. A Commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays*, Cambridge University Press.
- Kirk, G.S., Ravel J.E., Schofield M. 1996. *Filozofia przedsokratejska*, Warszawa–Poznań.
- Król, Z. 2005. *Platon i podstawy matematyki współczesnej*, Toruń.
- Król, Z. 2006. *Geometria starożytna i filozofia Platona na podstawie „Komentarza Pappusa do X księgi Elementów Euklidesa”*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” nr 2–3.
- Król, Z. 2007. *Starożytne teorie proporcji*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki PAN” nr 1.
- Nikomachos z Gerazy. *Introductio* I 14.1–2.
- Nikomachos z Gerazy. *Introductio* I 23.4–5.
- Nikomachos z Gerazy. *Introductio* I 7, I 8.
- Świderek, J. 2002. *Rozważania matematyczne w pismach Platona*, Lublin.
- Töplitz, O. 1931. *Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon*, „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik”, Abt. B.1.
- Widomski, J. 1996. *Ontologia liczby*, Kraków.

### **An Apology of Pythagorean Mathematics**

*Key words: Pythagoras, incommensurability, philosophy of mathematics, history of mathematics, history of philosophy*

The paper emphasizes the role of ancient mathematics in the philosophical considerations in Pythagorean school and contains a reconstruction of some basic mathematical ideas which help to explain many of the early-Pythagorean fragments. Some contributions to the discovery of incommensurability within Pythagorean school are discussed. Their importance for mathematics cannot be overestimated. Then the course of mathematically oriented inquiries is set against some purely philological studies.