

Krzysztof Wójtowicz

Dlaczego nie ma matematycznych możliwych światów?

Słowa kluczowe: możliwy świat, realizm matematyczny, full-blooded Platonism, identyczność

Wstęp

Dość powszechny jest pogląd iż to, jakie są prawdy matematyczne, nie zależy od żadnych faktów o charakterze przygodnym. Prawdy matematyczne są niezależne od aktualnego układu faktów, a zatem są konieczne – czy, mówiąc inaczej – obowiązują we wszystkich możliwych światach¹.

Taka teza nie jest – moim zdaniem – jasna. W jawny lub niejawny sposób zaangażowane są w nią pojęcia takie, jak: konieczność, możliwy świat, prawda konieczna, prawda logiczna, niesprzeczność. Niejako „na styku” tych pojęć pojawia się szereg problemów domagających się dyskusji i wyjaśnienia, gdyż bezkrytyczne użycie tych pojęć prowadzi do płataniny niejasnych tez. Zadaniem niniejszego artykułu jest zwrócenie uwagi na te trudności i dokonanie przynajmniej częściowej eksplikacji używanych pojęć. Analizy te prowadzą do wniosku, że pojęcie matematycznego możliwego świata jest niejasne, prowadzi do licznych trudności i nie wnosi nic do dyskusji filozoficznych dotyczących matematyki.

Pojęcia modalne są używane w dyskusji dotyczącej filozofii matematyki zarówno przez antyrealistów, jak i przez (niektórych) realistów. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, antyrealiści odwołują się do pojęć modalnych, aby uwolnić się od ontologii obiektów abstrakcyjnych. Realisci natomiast posługują się tymi pojęciami, aby zdać sprawę z intuicji dotyczących bogactwa świata matematycznego i obiektywności matematyki. Więcej uwagi poświęcę problematyce pojęć modal-

¹ Realista powie: obiekty matematyczne są pozaczasowe, pozaprzestrzenne, ich własności nie mają żadnego związku z tym, co się akurat dzieje w świecie (ile jest gatunków pajaków czy jaka jest stała grawitacji).

nych z punktu widzenia stanowiska realistycznego, ale – dla pełności obrazu – przedstawię również krótko problem użycia pojęć modalnych przez antyrealistów (zwłaszcza że niektóre problemy są wspólne dla obu stanowisk).

W artykule będę posługiwał się pojęciem możliwego świata wyłącznie w odniesieniu do matematyki. Nie chodzi więc o możliwe światy w pełnym znaczeniu tego słowa (zawierające np. inne gatunki zwierząt), ale wyłącznie o możliwe światy (struktury) matematyczne.

I. Możliwe światy antyrealistów

Antyrealiści odwołują się do pojęcia możliwości, dokonując swoistego „wymodalizowania” obiektów matematycznych. W miejsce tez dotyczących rozumianej klasycznie prawdy pojawiają się stwierdzenia oparte na pojęciach modalnych. Taki zabieg jest dokonywany m.in. przez Chiharę i Hellmana².

(1) Chihara stara się zachować kategorię prawdziwości zdań matematycznych bez przyjmowania realistycznej ontologii. Wprowadza więc kategorię możliwych konstrukcji językowych. Zdania matematyczne odnoszą się właśnie do możliwości wykonania konstrukcji językowych w możliwych językach, a nie do istniejących niezależnie od matematycznego języka abstrakcyjnych obiektów. Stanowisko Chihary można więc uznać za kombinację dwóch stanowisk: „realizmu co do wartości logicznej” oraz „antyrealizmu co do ontologii”³. Zachowana zostaje wówczas kategoria prawdy matematycznej, ale wyeliminowane zostają zobowiązania ontologiczne dotyczące istnienia obiektów matematycznych.

Nośnikiem prawdy matematycznej jest więc możliwość wykonania pewnych konstrukcji językowych⁴. Nie chodzi tu bynajmniej o konstruowanie samych

² Ideę wyeliminowania kategorii (pozajęzykowych) obiektów matematycznych na rzecz pojęć modalnych można znaleźć w pracy [Putnam 1967]. Autor proponuje uznanie pojęć modalnych za pierwotne, nie za zdefiniowane w teoriomnogościowej semantyce. Taki zabieg pozwoli nam na uwolnienie się od zobowiązań ontologicznych związanych z przyjęciem referencjalnej semantyki dla zdań matematycznych i na reinterpretację zdań matematycznych w antyrealistycznym duchu. Ontologia obiektów abstrakcyjnych ma więc zostać wyeliminowana na rzecz założeń dotyczących możliwości istnienia pewnych obiektów. Odwrotnie zatem niż przy konstruowaniu semantyki typu Kripkego (gdzie modele są zdefiniowane jako teoriomnogościowe struktury relacyjne), tu mamy do czynienia z reinterpretacją zdań matematycznych przy użyciu pojęć modalnych (traktowanych jako pierwotne). Putnam twierdzi np., że prawdziwość zdań arytmetycznych znaczy jedynie tyle, że aksjomaty arytmetyczne w konieczny sposób implikują pewne twierdzenia, a nie że są prawdziwe na temat pewnych pozajęzykowych obiektów.

³ W literaturze używane są określenia *(anti)realism in truth-value* oraz *(anti)realism in ontology*.

⁴ „Podstawową ideą w moim podejściu jest stworzenie systemu matematycznego, w którym twierdzenia egzystencjalne tradycyjnej matematyki zostaną zastąpione twierdzeniami dotyczącymi konstruowalności: tam, gdzie w tradycyjnej matematyce twierdzi się, że taki-to-a-taki obiekt istnieje, w tym systemie pojawią się twierdzenia dotyczące konstruowalności” [Chihara 1990, 25].

obiektów matematycznych, ale pewnych *konstrukcji językowych*⁵, zaś podstawowe pojęcie techniczne systemu Chihary to pojęcie tzw. zdania otwartego⁶. Pojawiają się stwierdzenia dotyczące konstruowalności takich zdań, których ogólna postać to: „możliwe jest skonstruowanie zdania otwartego takiego, że...”. Takie stwierdzenia dotyczą możliwości wykonania ciągu pewnych czynności przez użytkowników języka (w tym przypadku – języka matematycznego)⁷. Chihara mówi tu o tzw. logicznej przestrzeni zdań otwartych, twierdząc jednak, że to pojęcie wprowadza wyłącznie w celach ilustracyjnych – nie postuluje bowiem istnienia takiej przestrzeni jako abstrakcyjnego bytu⁸. Zdaniem Chihary, teoria przestrzeni logicznej zdań otwartych pozwala na eliminację założeń o istnieniu obiektów abstrakcyjnych, pozwalając na rekonstrukcję niezbędnych w zastosowaniach technik [Chihara 1990, 94]⁹. Wykorzystanie pojęć modalnych pozwala więc na zachowanie kategorii prawdziwości zdań matematycznych oraz na przypisanie matematyce interpretacji (choć oczywiście taka interpretacja nie ma nic wspólnego z interpretacją w rozumieniu realistów). Nie wiąże się jednak z przyjęciem tezy modalnego realizmu w żadnym sensie, zaś pojęcia modalne traktowane są jako pierwotne, aby uniknąć zobowiązań do uznania istnienia możliwych światów traktowanych przedmiotowo.

(2) Hellman dokonuje rekonstrukcji teorii matematycznych w ramach tzw. modalnego strukturalizmu¹⁰. Podobnie jak Chihara, Hellman zachowuje kategorię prawdziwości zdań matematycznych, ale bez realistycznej ontologii. Podana przez Hellmana ogólna charakterystyka matematyki to: „matematyka to swobodne badanie strukturalnych możliwości w ramach odpowiednich środków dedukcyjnych” [Hellman 1989, 6]. Jest to więc stanowisko antyrealistyczne, w myśl którego obiekty matematyczne nie istnieją, zaś matematyka dotyczy możliwych

⁵ Nie należy więc bynajmniej łączyć stanowiska Chihary ze stanowiskiem matematycznego konstrukttywizmu.

⁶ Chihara proponuje własny formalizm, który opiera się na ω -sortowym rachunku predykatów (stanowiącym pochodną teorii typów Russella) z dodatkowym operatorem, tzw. kwantyfikatorem konstruowalności (*constructibility quantifier*). W tym systemie, zamiast kwantyfikacji odnoszącej się do zbiorów i relacji należenia, mowa jest o możliwych zdaniach i o relacji spełniania.

⁷ W miejsce twierdzeń egzystencjalnych (dotyczących np. istnienia liczb, przestrzeni funkcyjnych, różności *etc.*) występują więc zdania dotyczące możliwości wykonania pewnych konstrukcji językowych.

⁸ Chihara twierdzi iż to, że jakaś konstrukcja jest możliwa do przeprowadzenia, nie znaczy wcale, że ktoś tę konstrukcję faktycznie przeprowadził, ani nawet, że wiemy, jaki jest sposób przeprowadzenia tej konstrukcji. Znaczy jedynie tyle, że „w logicznej przestrzeni zdań otwartych jest dostatecznie dużo miejsca, aby skonstruować dane zdanie otwarte” [Chihara 1990, 48].

⁹ Chihara uważa problem zastosowań matematyki za istotny dla dyskusji dotyczących ontologii matematyki – w szczególności zgadza się z tym, że poddanie rekonstrukcji teorii matematycznych winno umożliwiać również zrekonstruowanie technik potrzebnych w zastosowaniach.

¹⁰ Inspirowany jest więc zarówno wątkami strukturalistycznymi w filozofii matematyki, jak i pomysłem potraktowania pojęć modalnych jako pierwotnych.

struktur – i to właśnie możliwość istnienia struktur jest nośnikiem prawdy matematycznej.

Podstawową rolę w koncepcji Hellmana odgrywa idea podania parafraz zdań matematycznych (które *prima facie* mówią o pewnych obiektach) jako zdań modalnych. W swojej pracy dokonuje takiej modalnej rekonstrukcji kilku teorii, tutaj będę odwoływał się jedynie – w charakterze ilustracji – do arytmetyki liczb naturalnych. Wypowiedzi o liczbach przybierają formę „gdyby istniał pewien ω -ciąg¹¹, to zachodziłoby w nim zdanie α ”, zamiast „zdanie α jest prawdziwe w strukturze liczb naturalnych”. W myśl koncepcji Hellmana nie mówimy o istnieniu struktur matematycznych i prawdziwości zdań matematycznych, ale o tym, że – gdyby istniała odpowiednia struktura – to zdanie to byłoby prawdziwe (jest to tzw. składowa hipotetyczna koncepcji Hellmana).

Z punktu widzenia problemu możliwych światów ciekawsza jest tzw. składowa kategoryczna koncepcji Hellmana. Nie ma ona charakteru warunkowego, ale mówi o możliwości istnienia pewnych struktur¹². Miejsce tez egzystencjalnych zajmują tezy o charakterze modalnym, wyrażające możliwość istnienia struktur odpowiedniego typu, oraz konieczność zachodzenia w tych strukturach odpowiednich zdań. Należy podkreślić, że Hellman przyjmuje jedynie tezy dotyczące *możliwości istnienia* struktur, a nie *istnienia możliwych* struktur. Tej zasady bardzo skrupulatnie przestrzega w swoich formalnych rekonstrukcjach teorii matematycznych.

Wspólne dla tego typu strategii antyrealistycznych jest przekonanie o tym, że pojęcie modalne można interpretować bez kategorii możliwego świata rozumianego obiektowo. Ani Hellman, ani Chihara nie są modalnymi realistami (jak np. Lewis), nie przyjmują istnienia possybiliów, zaś mówienie o możliwych światach traktują jako zabieg heurystyczny. Chihara mówi o możliwych konstrukcjach w możliwych językach, deklarując jednocześnie, że przyjęcie tezy o wykonalności pewnych konstrukcji nie prowadzi do żadnych ontologicznych deklaracji. Również Hellman posługuje się pojęciami modalnymi, ale bez angażowania pojęcia możliwej struktury – i bardzo skrupulatnie dba o to, aby nie pojawiały się żadne zobowiązania do possybiliów. Pojęcia modalne są więc traktowane jako pojęcia pierwotne i nie jest dla nich postulowana teoriomodelowa semantyka możliwych światów.

¹¹ Strukturaliści nie traktują liczb jako obiektów mających wewnętrzną naturę, ale jako miejsca w pewnej strukturze. Dlatego mówią o ω -ciągu, a nie o klasie liczb naturalnych traktowanych jako obiekty (gdzie ω -ciąg to ciąg o strukturze liczb naturalnych, czyli: 0, 1, 2, 3...).

¹² W przeciwnym razie zdanie typu „gdyby struktura X była ω -ciągiem, to prawdziwe byłoby w niej zdanie α ”, w przypadku gdyby faktycznie nie istniała struktura X, byłoby pusto spełnione dla dowolnego zdania α , co jest sprzeczne z intuicjami. Dlatego potrzebna jest składowa kategoryczna.

Uważam, że strategia proponowana przez Chiharę i Hellmana nie jest skuteczna i tworzy więcej problemów filozoficznych niż rozwiązuje¹³. Problematiczne jest zwłaszcza traktowanie pojęć modalnych jako pierwotnych.

II. Możliwe światy z punktu widzenia realizmu

W pierwszej kolejności przedyskutuję problem z punktu widzenia platonizmu Gödla oraz realizmu Quine'a, a następnie z punktu widzenia stanowiska „pełnokrwistego platonizmu” Balaguera, traktując je jako punkt wyjścia do rozważań o ogólniejszym charakterze¹⁴.

1. Quine i możliwe światy

Najszerzej dyskutowanym we współczesnej literaturze argumentem na rzecz matematycznego realizmu jest argument Quine'a, który prowadzi do tzw. quasi-empirystycznej wersji realizmu matematycznego¹⁵. Podstawą argumentacji Quine'a jest obserwacja, że matematyka jest niezbędna w nauce.

Quine wychodzi od obserwacji, iż punktem wyjścia tworzenia wszelkich teorii naukowych są dane zmysłowe, które podlegają interpretacji, aby utworzyć spójny i efektywny obraz świata¹⁶. Kiedy tworzymy teorie naukowe, istotny jest mechanizm postulowania przedmiotów, swoistego poszerzania ontologii, aby uprościć teorie i nadać im bardziej operatywną postać. Mamy w szczególności do czynienia z mechanizmem reifikacji, *postulowania* obiektów pewnego typu. Mamy z nim do czynienia już w fazie tworzenia naszego zdroworoządkowego obrazu świata, kiedy to postulujemy istnienie przedmiotów fizycznych¹⁷.

¹³ Czytelnik zainteresowany szczegółową analizą znajdzie ją np. w [Wójtowicz 2003].

¹⁴ W tradycyjnych dyskusjach dotyczących współczesnego realizmu matematycznego mówiło się o dwóch głównych jego reprezentantach: Gödla i Quine (por. np. [Maddy 1989] czy [Shapiro 2000]). Jednak propozycja „pełnokrwistego platonizmu” Balaguera wywołała na tyle żywe zainteresowanie, że uważam za właściwe uwzględnić również to stanowisko – zwłaszcza że inspiruje do postawienia pewnych ogólnych pytań dotyczących matematycznego realizmu.

¹⁵ Stanowisko Quine'a jest powszechnie znane, nie będę go tu więc szczegółowo omawiał. Zainteresowany Czytelnik znajdzie prezentację i analizę w [Wójtowicz 2003].

¹⁶ W szczególności np. wybieramy fizykalistyczny, a nie fenomenalistyczny aparat pojęciowy, gdyż upraszcza to nasz opis sprawozdań z doświadczenia. „Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu, ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest [...] podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatami maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata” [Quine 1953a, 31].

¹⁷ „Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące – nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane” [Quine 1953b, 67].

Zdaniem Quine'a, jednostką sensu empirycznego jest cała teoria. I również ontologia danej teorii winna być zaakceptowana w całości (zaś technicznym kryterium pozwalającym na identyfikację ontologii jest tzw. kryterium kwantyfikikatorowe, którego popularne sformułowanie ma postać „istnieć to być wartością zmienną”). Nakłada to na nas obowiązek poważnego traktowania wszystkich zobowiązań ontologicznych danej teorii – w szczególności dotyczących obiektów matematycznych. Przyjęcie realistycznej interpretacji matematyki jest zatem wynikiem analiz metanaukowych, dotyczących roli matematyki w naukach empirycznych. To stosowalność matematyki jest kluczem do uzasadnienia realistycznej tezy – i tym samym realistyczna interpretacja musi być ograniczona do teorii matematycznych znajdujących zastosowanie w naukach empirycznych.

Quine był niechętnie nastawiony do używania pojęć modalnych, do słynnego „śmietnika nieurzeczywistnionych możliwości”¹⁸. Można więc przypuszczać, że tezę o koniecznej prawdziwości zdań matematycznych uznałby nie tyle za prawdziwą lub fałszywą, co za pozbawioną sensu. Jednak niezależnie od sympatii samego Quine'a, warto zatrzymać się nad problemem, czy posługiwanie się pojęciami modalnymi i przyjęcie tezy o koniecznej prawdziwości zdań matematycznych jest w ogóle możliwe do pogodzenia ze strategią argumentacji na rzecz matematycznego realizmu opartą na fakcie stosowalności matematyki w naukach empirycznych.

Twierdzę, że nie jest. Otóż to, jaka teoria matematyczna zostanie uznana za teorię zinterpretowaną (*eo ipso*: jakie przyjmujemy tezy ontologiczne dotyczące matematycznego świata) jest pochodną analiz dotyczących zobowiązań ontologicznych teorii empirycznych. Teorii – dodajmy – opisujących nasz świat. Mamy prawo (i obowiązek) uznać istnienie obiektów matematycznych tylko wtedy, jeśli wynika to z tych analiz. Nie każda teoria matematyczna zasługuje więc na realistyczną interpretację, zależy to bowiem od tego, czy znajduje odpowiednie zastosowania w nauce. Realistycznie będziemy więc interpretować np. teorię liczb rzeczywistych, ale już np. abstrakcyjnej teorii mnogości odmówimy pozajęzykowego odniesienia. Quine pisze:

Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych, ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (*simplificatory rounding out*), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów [Quine 1984, 788].

Warto podkreślić, że Quine bardzo wyraźnie stwierdza, że są to niezinterpretowane systemy – nie mówi nic o np. możliwych, lecz niezrealizowanych uniwersach. Nie jest to więc wizja „oceanu możliwości matematycznych”, z którego wybieramy sobie niektóre możliwości jako zaktualizowane. Jest to raczej ów

¹⁸ Który jest „wylęgarnią elementów wywołujących nieporządek”, [Quine 1953a, 13].

Quine'owski krajobraz pustynny, na którym od czasu do czasu pojawiają się byty matematyczne (ale tylko wtedy, kiedy już naprawdę nie ma innego wyjścia). I są to oczywiście byty aktualne, bo tylko takim można przypisać status ontologiczny. O innych (możliwych, lecz niezaktualizowanych) bytach matematycznych w ogóle w ramach takiej koncepcji nie może być mowy.

2. Gödel i możliwe światy

Gödel jest reprezentantem innej wersji matematycznego realizmu. Zupełnie inaczej niż Quine argumentuje na rzecz realistycznej interpretacji matematyki. Jego zdaniem, założenie o istnieniu obiektów matematycznych jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych [Gödel 1944, 220]. Przedmioty matematyczne tworzą porządek niezależny od rzeczywistości fizycznej i od badającego je matematyka. Gödel odrzuca więc zdecydowanie wszelki psychologizm; odrzuca też oczywiście neopozytywistyczną koncepcję matematyki jako składni języka nauki¹⁹.

Podstawową dla matematyki teorią jest – zdaniem Gödla – teoria mnogości, i aby w filozoficznie zadowalający sposób wyjaśnić status matematyki, konieczne jest przyjęcie realistycznej interpretacji teorii mnogości. Uniwersum matematyczne Gödla jest więc bardzo bogate²⁰. Gödel jest w odniesieniu do matematyki poznawczym optymistą: możemy dążyć do coraz lepszego rozumienia pojęć matematycznych, posługując się zasadniczo dwoma podstawowymi metodami: analizą pojęć oraz analizą owocności przyjmowanych aksjomatów²¹. Istnieje więc jedno,

¹⁹ Krytyce tego stanowiska poświęcony jest (niepublikowany za życia Gödla) artykuł [Gödel 1953/59].

²⁰ Dla Gödla swoistym „motorem napędowym” do przyjmowania silnej tezy realizmu było przekonanie o rozwiązywalności wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych – także jeśli wiąże się to z koniecznością przyjmowania silnych założeń ontologicznych.

²¹ O intuicji mówi następujący fragment: „Pomimo ich [obiektów teorii mnogości – K.W.] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej” [Gödel 1947/64, 271].

O drugim kryterium mówi zaś następujący fragment: „[D]ezyzja dotycząca ich prawdziwości jest możliwa także w inny sposób, a mianowicie poprzez indukcyjną analizę ich „sukcesu”. Sukces oznacza tutaj owocność w konsekwencje, w szczególności w konsekwencje „weryfikowalne”, tj. konsekwencje dowodliwe bez nowych aksjomatów, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają zawarcie w jednym dowodzie wielu różnych dowodów. [...] Można jednak wyobrazić sobie o wiele wyższy poziom weryfikowania. Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna” [Gödel 1947/64, 265].

obiektywne uniwersum mnogościowe, a naszym zadaniem jest poszukiwanie opisu tego uniwersum, czyli możliwie najbardziej precyzyjny opis pojęcia zbioru²².

Uniwersum matematyczne Gödla ma charakter absolutny. Pisał więc o matematyce obiektywnej, która tworzy system zdań „prawdziwych w absolutnym sensie, bez dodatkowych założeń” [Gödel 1951, 305], odróżniając ją od matematyki subiektywnej, składającej się jedynie ze zdań dowodliwych. Uniwersum matematyczne składa się ze zbiorów – i to zbiory są podstawową kategorią przedmiotów matematycznych. Gödel postuluje więc jednorodną ontologię, tworzoną przez *jedno* uniwersum matematyczne, które poznajemy dzięki intuicji matematycznej. Istnieje ono w sposób obiektywny i niezależny od matematyków. Prawdy matematyczne dotyczą pojęć, które „tworzą obiektywną rzeczywistość, której nie możemy tworzyć ani zmieniać, ale jedynie postrzegać i opisywać” [Gödel 1951, 320].

Nie ma w koncepcji Gödla miejsca na kategorię możliwych światów (uniwersów) matematycznych. Oczywiście, nasze uniwersum matematyczne zawiera (na mocy twierdzenia o pełności) modele dla wszystkich niesprzecznych teorii (w szczególności dla różnych wariantów i modyfikacji teorii mnogości), ale tych modeli nie uznajemy za możliwe światy (uniwersa) matematyczne. Inna jest bowiem intuicja metafizyczna, związana z rozumieniem możliwego *uniwersum*: te możliwe światy winny bowiem być ontycznie niezależne – mówiąc obrazowo, winny pełnić rolę równoprawnych uniwersów matematycznych, nie zaś formalnych modeli *wewnątrz* uniwersum. Zbiory to prawdziwe zbiory, zaś należenie jest pewną obiektywną relacją ontyczną zachodzącą między tymi zbiorami (a nie interpretacją pewnego dwuargumentowego predykatu w pewnej zdefiniowanej formalnie strukturze relacyjnej). Warto podkreślić, że sam Gödel uważał kategorię prawdy matematycznej za kategorię metafizyczną, a nie formalną. Prawda matematyczna jest dla Gödla czymś absolutnym, nie da się zdefiniować w terminach technicznych. Gödel oczywiście zdawał sobie sprawę z tego, że teorię mnogości można interpretować w różnych modelach – jednak nie przypisywał temu faktowi większego znaczenia filozoficznego. Z filozoficznego punktu widzenia istotne jest bowiem badanie tej jedynej, realnie istniejącej struktury matematycznej, zaś badania teoriomodelowe (oparte na definicji prawdy Tarskiego) nie przynoszą znaczącego postępu w badaniach nad problemem prawdy matematycznej²³. Definicja spełniania jest jedynie pojęciem technicznym, które nie

²² W szczególności za dobrze postawiony uważał np. problem poszukiwania prawdziwej wartości kontinuum (choć oczywiście zdawał sobie sprawę z niezależności hipotezy kontinuum od ZFC). W swoich badaniach Gödel podejmował próby znalezienia wiarygodnych aksjomatów, które pozwoliłyby na rozstrzygnięcie tego problemu [Gödel 1970a, 1970b]. Prób tych jednak nie można uznać za udane.

²³ Prezentację i analizę poglądów Gödla na problem definicji prawdy Tarskiego można znaleźć w [Krajewski 2003, 221–242]. Krajewski przytacza uwagi Hintikka, który twierdzi iż Gödel pozostał wierny idei logiki i języka jako uniwersalnego medium, która wiąże się z założeniem o jedyności

opisuje adekwatnie istoty prawdy matematycznej²⁴. Z punktu widzenia realizmu Gödla nie można więc mówić o możliwych strukturach i alternatywnych światach matematycznych. W koncepcji Gödla jest jedno podstawowe pojęcie matematyczne (należenie), które wyznacza nam niejako granice matematyczności, jest jedna kategoria ontyczna (zbiory) i jedno obiektywne uniwersum matematyczne (które nie redukuje się do pojęcia modelu formalnego).

3. Realizm Balaguera

Stanowisko „pełnokrwistego platonizmu” (*full-blooded Platonism* – dalej będę się posługiwał skrótem FBP) Balaguera wyrasta z intuicji świata matematycznego jako zaludnionego wielkim bogactwem matematycznych tworów²⁵. Balaguer precyzuje tę intuicję w postaci tezy, że wszelkie niesprzeczne teorie (koncepcje) matematyczne mają swoje realizacje – czyli, że każda niesprzeczna teoria matematyczna opisuje pewien fragment matematycznej rzeczywistości²⁶. Sądzę zatem, że można tę tezę przeformułować na stwierdzenie: istnieją wszystkie możliwe światy matematyczne. Stanowisko FBP radykalnie różni się więc od stanowisk realistycznych Quine’a czy Gödla. Inspiruje do postawienia podstawowych pytań dotyczących rozumienia pojęć modalnych w matematyce i będę je tu traktował jako punkt wyjścia do rozważań ogólniejszej natury.

Możliwe światy (matematyczne) stanowią ontyczne korelaty teorii niesprzecznych. Samo to stwierdzenie nie mówi jednak nic na temat ich natury, nie wyjaśnia również, jak rozumieć pojęcie niesprzeczności. Tradycyjna parafraza formalna pojęcia niesprzeczności semantycznej (w stylu Tarskiego) opiera się na pojęciach teorii mnogości: pojęcie modelu, spełniania *etc.* definiowane są w teorii mnogości; twierdzenia metateoretyczne (np. twierdzenie o zwartości czy pełności logiki elementarnej) są twierdzeniami teorii mnogości. Można więc powiedzieć, że w tradycyjnym ujęciu teoriomodelowym to teoria mnogości dostarcza „ontologii tła”, z której czerpiemy zasoby do modelowania pojęć i teorii matematycznych.

świata matematycznego (por. [Hintikka 1997]). Tarski dopuszcza interpretacje języka w różnych dziedzinach, natomiast Gödel posługuje się pojęciem (właściwej) interpretacji w świecie matematycznym.

²⁴ Warto dodać, że Gödel nie interesował się zbyt burzliwym rozwojem teorii mnogości po odkryciu przez Cohena na początku lat sześćdziesiątych metody *forcingu*. Zdaniem Wanga, Gödel nie zajmowałby się współczesną teorią mnogości ze względu na jej wysoce techniczny charakter ([Wang 1987, 208]). Badania techniczne winny być bowiem – zdaniem Gödla – jedynie środkiem do celu, jakim jest poznanie prawdy o uniwersum matematycznym – a nie celem samym w sobie.

²⁵ Szczegółową prezentację i dyskusję tego stanowiska Czytelnik znajdzie w [Wójtowicz 2003].

²⁶ Jest to więc bliskie często wypowiedzanemu przekonaniu, że w matematyce to niesprzeczność stanowi kryterium istnienia. Zdanie to uważam za wysoce niejasne i wypowiedzane często w bezrefleksyjny sposób.

Balaguer jednak traktuje pojęcie niesprzeczności jako pojęcie pierwotne, odwołując się do koncepcji Fielda z [Field 1991]²⁷. Zdaniem Balaguera, aby wiedzieć, że pewna teoria matematyczna jest niesprzeczna, nie jest konieczne uprzednie uzyskanie wiedzy na temat matematycznego uniwersum. Takie ujęcie umożliwia – zdaniem Balaguera – wyjaśnienie problemów epistemologicznych matematycznego realizmu. Skoro bowiem każda niesprzeczna teoria T opisuje jakiś fragment matematycznego świata, to wiedza o niesprzeczności teorii T gwarantuje nam, że w ten sposób uzyskujemy pewną wiedzę na temat (pewnego fragmentu) matematycznego świata. Dzięki temu możemy rozwiązać jeden z podstawowych problemów stanowiska realistycznego, a mianowicie problem epistemologiczny. Parafrazując wyniki rozważań Balaguera w języku możliwych światów, możemy powiedzieć, że w ten sposób uzyskamy wyjaśnienie źródeł wiedzy modalnej, dotyczącej możliwych światów. Kluczem do wiedzy o świecie matematycznym staje się wiedza o niesprzeczności teorii.

3.1. Kryterium identyczności i problem ujęcia teoriomodelowego

W dyskusjach dotyczących modalności mówi się m.in. o problemie identyczności obiektów w różnych światach, w szczególności mówi się np. o tym, że ten sam obiekt występuje w różnych światach (zaś w słabszej wersji: że występują odpowiedniki tego obiektu). Wydaje się to być zgodne z intuicją, w myśl której każdy z nas mógłby się pojawić także w świecie, który różni się od naszego tylko tym, że jest w nim o 1 komara mniej²⁸. Czy podobne stwierdzenie (dotyczące istnienia w różnych światach) miałoby sens w odniesieniu do obiektów matematycznych? Innymi słowy: czy jest sens twierdzić np., że liczby naturalne 1, 2, 3... *etc.* występują również w innym świecie (np. takim, w którym nie istnieją zbiory

²⁷ Field twierdzi, że teoriomnogościowa definicja niesprzeczności nie stanowi adekwatnej formalnej parafrazy intuicyjnie rozumianego pojęcia niesprzeczności. Jego zdaniem pojęcie niesprzeczności logicznej ma pierwotny sens – niezależny od pojęć niesprzeczności semantycznej i niesprzeczności syntaktycznej. Field formułuje następujące postulaty znaczeniowe wyjaśniające sens tego pojęcia niesprzeczności (które odwołują się do semantycznego i syntaktycznego pojęcia niesprzeczności [Field 1989, 32]):

(1) Jeśli teoria T ma model, to jest logicznie niesprzeczna.

(2) Jeśli teoria T jest logicznie niesprzeczna, to T nie dowodzi sprzeczności.

Te zależności precyzują w pewien sposób pojęcie niesprzeczności logicznej, choć – podkreśla Field – nie stanowią jego definicji. Pojęcie to ma bowiem znaczenie pierwotne, niezależne od naszego rozumienia i naszej akceptacji tez teoriomodelowych czy teoriowodowodowych. Nie może – w ogólnym wypadku – zostać zredukowane ani do pojęcia posiadania modelu, ani pojęcia niedowodzenia sprzeczności (por. dyskusję w [Wójtowicz 2001]).

Z krytyką teoriomodelowej eksplikacji pojęcia niesprzeczności wystąpił Etchemendy w [Etchemendy 1990], twierdząc, iż nie odpowiada ona naszym preteoretycznym intuicjom. Krytyczne uwagi wobec koncepcji Tarskiego zawiera też praca [McGee 1992].

²⁸ Nie podejmuję tu problemu, czy to jest możliwe i czy akurat ubytek tego 1 komara nie spowodowałby np. całkowitej katastrofy ekologicznej. Być może przykład ten nie jest dobry, ale sądzę, że można sobie wyobrazić świat, który różni się od naszego tylko w bardzo lokalny sposób.

nieprzeliczalne, albo takim, w którym istnieją tylko liczby kardynalne nieskończone $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, ale nie ma już np. liczby $\aleph_\omega$ ²⁹)?

Colyvan i Zalta, analizując stanowisko FBP, zwracają uwagę na fakt, że niejasne są mechanizmy interpretacji terminów jednostkowych, takich np. jak „zbiór liczb naturalnych” [Colyvan, Zalta 1999, 345]. Jeśli bowiem przyjmiemy – za FBP – że istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne, to w szczególności istnieje jakaś ω na mocy np. $ZFC+CH$, jakaś ω na mocy $ZFC+\neg CH$ etc³⁰. Gdzie należy szukać desygnatu terminu „zbiór liczb naturalnych”?

Mamy do czynienia z ogólnym problemem: w jakim sensie (i czy w ogóle) można mówić o tym, że w różnych światach pojawiają się *te same* obiekty matematyczne (a w słabszym sformułowaniu: odpowiedniki tych samych obiektów matematycznych)? Ujęcie teoriomodelowe oferuje dość naturalne rozwiązanie tego problemu. Niech T będzie teorią, zaś $\text{Mod}(T)$ klasą modeli dla tej teorii. Przypuśćmy, że twierdzeniem teorii T jest zdanie $\exists! x\varphi(x)$ (istnieje dokładnie jeden obiekt o własności φ). A zatem w każdym modelu $M \in \text{Mod}(T)$ jest (dokładnie jeden) taki obiekt $a \in M$, że w modelu M prawdą jest $\varphi(a)$. Mówiąc swobodnie, w każdym modelu M istnieje dokładnie jeden obiekt $a \in M$, który przez mieszkańców modelu M jest postrzegany jako obiekt posiadający własność φ . Możemy z czystym sumieniem twierdzić, że w każdym z modeli znajduje się obiekt grający w nim pewną rolę (w sensie: spełniający dany opis językowy). Jednak w takim ujęciu nie ma sensu stwierdzenie, że w różnych modelach występuje *ten sam* obiekt. Posiadanie własności φ jest cechą danego obiektu tylko z *punktu widzenia* danego modelu, więc nie ma sensu zastanawianie się nad tym, czy dany obiekt ma tę cechę naprawdę³¹.

W ujęciu teoriomodelowym mamy zewnętrzną metateorię oraz zewnętrzną „ontologię tła” (*background ontology*), która dostarcza nam dostatecznie dużej ilości struktur, aby interpretować teorie. W tym sensie można też powiedzieć, że przy spojrzeniu „z zewnątrz” te wszystkie obiekty, które z punktu widzenia określonych modeli są „świadkami” dla własności φ , mogą mieć zupełnie inną naturę. Jednak takie postawienie sprawy nie ma sensu z punktu widzenia samej teorii T . Modele dla T to pewne zbiory, na których określono relacje. Zbiory

²⁹ Oczywiście, w takich światach nie byłyby spełnione wszystkie aksjomaty ZFC, bo z ZFC wynika, że liczba $\aleph_\omega$ istnieje.

³⁰ CH to skrót dla hipotezy kontinuum. Przez $ZFC+CH$ i $ZFC+\neg CH$ oznaczam odpowiednio teorię mnogości ZFC z dodaną hipotezą kontinuum i jej negację. Dodajmy tutaj, że każde rozszerzenie ZFC (a takich rozszerzeń jest *continuum*) prowadzi do pewnego rozumienia pojęcia zbioru, każde z nich opisuje pewien fragment matematycznej rzeczywistości. Każda z tych teorii dowodzi istnienia zbioru liczb naturalnych.

³¹ Tu nasuwa się stwierdzenie Quine’a, który pisze, iż „Sądzę, że w wypadku przedmiotów abstrakcyjnych intersubiektywna tożsamość odniesienia nie ma uchwytneho sensu, jeśli miałby on polegać na czymś więcej niż to, co znajduje wyraz w powodzeniu dialogu. Niemal to samo można powiedzieć o przedmiotach konkretnych, gdy wykraczamy poza zasięg ostensji i rozważamy przedmioty teoretyczne, takie jak cząstki elementarne” [Quine 1998, 104]. Jest to stanowisko antyesencjalistyczne – i ujęcie teoriomodelowe odpowiada takiej właśnie intuicji.

te „mieszkają” w uniwersum mnogościowym, ale z punktu widzenia teorii T natura elementów zbioru tworzącego uniwersum modelu nie żadnego znaczenia. Np. z punktu widzenia arytmetyki Peano nie ma znaczenia, czy dany model jest zrobiony np. z kolejnych zbiorów ω , $P(\omega)$, $P(P(\omega))$, ... *etc.*, odgrywających w tym modelu rolę liczb 0, 1, 2... (rolę operacji następnika będzie odgrywała wówczas operacja tworzenia zbioru potęgowego)³². To przestaje być „widoczne” z punktu widzenia modelu – a wyrazem tego jest fakt, że modele definiujemy jedynie z dokładnością do izomorfizmu.

Sądzę jednak, że ujęcie teoriomodelowe nie stanowi trafnej eksplikacji problemu prawdziwości matematyki w możliwych światach (i wyjaśnienia samego pojęcia możliwego świata). Tak rozumiane modele formalne nie odpowiadają intuicjom metafizycznym dotyczącym pojęcia możliwego świata.

Rozważmy przykład teorii mnogości. Czy zgodzimy się, że możliwe światy (teoriomnogościowe) to po prostu modele dla (różnych wersji) teorii mnogości? Pamiętajmy, że model dla teorii mnogości to struktura relacyjna (M, E) , gdzie $E \subseteq M \times M$ jest pewną dwuargumentową relacją, stanowiącą interpretację predykatu należenia w danym modelu M . Ta interpretacja nie musi mieć nic wspólnego z prawdziwym należeniem (tzn. należeniem w uniwersum mnogościowym V), zaś same modele mogą mieć charakter całkowicie sztuczny – mogą to być na przykład przechodnie modele przeliczalne. W takich modelach wszystkie zbiory są (co najwyżej) przeliczalne, ale odgrywają stosowne role z punktu widzenia modelu M ³³. Czy taki przeliczalny model przechodni uznamy za możliwy świat teoriomnogościowy? Moim zdaniem, odpowiedź jest w jednoznaczny sposób negatywna. Mamy przecież pewne intuicje metafizyczne dotyczące zbiorów i relacji należenia – i nie rozumiemy ich w czysto formalny sposób³⁴.

³² Można za uniwersum modelu standardowego dla PA wziąć kolejne liczby kardynalne $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., definiując operacje arytmetyczne jako $\aleph_n + \aleph_m = \aleph_{n+m}$ *etc.* Z punktu widzenia samej arytmetyki nie ma oczywiście sensu pytanie, czy przypadkiem roli liczby 7 w modelu nie odgrywa jakiś zbiór nieprzeliczalny dość dużej mocy. W samych modelach kryteria tożsamości obiektów są wyznaczone jedynie przez relacje wyrażalne w języku, dla którego interpretacją jest ów model (w tym przypadku – jedynie przez formuły definiowalne w języku arytmetyki).

³³ W każdym modelu przeliczalnym jest jakiś zbiór, który „udaje” zbiór potęgowy zbioru liczb naturalnych (a więc zbiór mocy kontinuum), jakiś inny zbiór przeliczalny „udaje” liczbę kardynalną $\aleph_\omega$ (która istnieje na mocy aksjomatów ZFC) *etc.* Na modelach można dokonywać różnych operacji (np. *forcing* Cohena polega – w pewnym uproszczeniu – na konstruowaniu modeli o zadanych własnościach przez „dorzucanie” do danego modelu wyjściowego M odpowiednich elementów, por. np. [Kunen 1980]).

³⁴ Zgadzam się tu z Parsonsem, który pisze, iż: „Poważniejszy powód traktowania strukturalizmu jako fałszywego poglądu na teorię mnogości można wyprowadzić z intuicji dotyczących zbiorów o ogólniejszym ontologicznym charakterze. Na przykład istnieje koncepcja zbioru jako ogółu »ukonstytuowanego« przez jego elementy, a więc czegoś, co jest ontologicznie zależne od elementów, ale nie na odwrót. Dodaje to do relacji należenia pewną nową treść, ciągle bardzo abstrakcyjną, ale będącą w sposób widoczny czymś więcej, niż dopuściłby czysty strukturalizm” [Parsons 1990, 371].

Powiedzielibyśmy więc, że odpowiednikiem możliwego świata winno być raczej uniwersum mnogościowe (nie rozumiane bynajmniej jako pojęcie techniczne, takie jak pojęcie modelu). Modele w tych uniwersach to modele z punktu widzenia danego uniwersum – ale to nie te modele są możliwymi światami. I tu pojawia się – niejako poziom wyżej – pytanie o to, czy te uniwersa (możliwe światy) rządzą się podobnymi prawami jak modele w danym uniwersum? Czy np. obowiązuje „metafizyczne twierdzenie o pełności” (w tym sensie, że każda koncepcja zbioru jest zrealizowana, nie tylko w postaci formalnych modeli w danym uniwersum V , ale że istnieje takie uniwersum V_T dla każdej teorii T)? Taka „metafizyczna teza o pełności” byłaby już tezą metafizyczną *per se*, a nie twierdzeniem ZFC³⁵. Pojęcie prawdy w danym uniwersum nie będzie już utożsamiane z pojęciem spełniania w modelu. Nie można więc zaakceptować „algebraizacji” teorii mnogości, w ramach której matematykowi chodzi o konstruowanie czysto formalnych modeli, spełniających odpowiednie aksjomaty, nie zaś o poszukiwanie odpowiedzi na pytanie o to, jak naprawdę wygląda „świat matematyczny”³⁶. W takim „zalgebraizowanym” ujęciu pytania o naturę zbiorów ustępują miejsca czysto technicznym problemom. W ten formalistyczny sposób rozwija się współczesna teoria mnogości, całkowicie abstrahując od metafizycznych intuicji i poglądów twórców teorii mnogości, które stanowiły dla nich inspirację. W miejsce problemów filozoficznych pojawiają się problemy dotyczące czysto technicznych aspektów pojęcia relatywnej niesprzeczności i spełniania w sztucznie konstruowanych modelach. W myśl tego stanowiska, algebraizacja pozwala na czysto techniczne podejście do teorii mnogości, zaś „prawdziwość” przestaje być pojęciem metafizycznym dotyczącym rzeczywistości i staje się jedynie terminem technicznym. Taki punkt widzenia jest jednak nie do zaakceptowania, jeśli chcemy posługiwać się pojęciem możliwego świata.

3.2. Granice matematyczności

Skoro mówimy o tym, że każda niesprzeczna teoria *matematyczna* opisuje pewien fragment matematycznego świata, musimy mieć do dyspozycji jakieś kryterium bycia teorią matematyczną. I tu pojawia się problem, jak mamy patrzeć na matematykę:

(1) jako na zestaw teorii, sformułowanych w różnych językach, posługujących się różnymi systemami pojęć, technik, o różnych standardach ścisłości, które wprawdzie przenikają się ze sobą, ale nie tworzą jednolitej, zamkniętej struktury;

³⁵ Zauważmy na marginesie, że do udowodnienia twierdzenia o pełności potrzebny jest pewnik wyboru, a więc założenie *par excellence* teoriomnogościowe.

³⁶ Mówię o algebraizacji, aby podkreślić, iż w takim ujęciu na teorię mnogości patrzymy podobnie jak na teorię grup – formalną teorię pozbawioną modelu zamierzonego, lecz opisującą bardzo szeroką klasę struktur.

(2) jako na coś, co wyrasta z jednolitego systemu pojęć, a poszczególne teorie matematyczne stanowią jedynie swoiste uszczegółowienia tej fundamentalnej teorii.

Za drugą interpretacją przemawia fakt, że praktycznie cała matematyka daje się zrekonstruować w teorii mnogości – a więc to teoria mnogości jest taką naturalną kandydatką na teorię podstawową³⁷. Z drugiej jednak strony, system pojęć np. arytmetycznych, geometrycznych, probabilistycznych *etc.* bynajmniej nie wyrasta z teorii mnogości, ale z całkowicie nieteoriomnogościowych inspiracji. Te systemy pojęć postrzegamy jako autonomiczne, zaś na teorię mnogości patrzymy jako na narzędzie formalnej rekonstrukcji, swoistej formalnej idealizacji pojęć matematycznych. Jest to jednak tylko pewnego rodzaju idealizacja czy parafraza pojęć mających swój pierwotny, nieteoriomnogościowy sens³⁸.

Analiza tego zagadnienia wykracza zdecydowanie poza ramy niniejszej pracy. Należy jednak zauważyć, że problem ten ma istotne skutki z punktu widzenia dyskusji ontologicznych. Jeśli przyjmiemy tezę o teoriomnogościowości matematyki, to za warunek konieczny bycia teorią matematyczną uznajemy fakt interpretowalności w teorii mnogości (*eo ipso* teorii, które takiej interpretacji by się nie poddawały, nie uznamy za teorie matematyczne). Nie jest jednak wcale oczywiste, że taka teza o teoriomnogościowości jest zasadna³⁹. Jeśli jednak odrzucimy tę tezę, to na jakiej podstawie mielibyśmy twierdzić, że pewien zbiór zdań należy uznać za teorię matematyczną (która tym samym – zgodnie ze sztandarową tezą FBP – opisuje pewien fragment matematycznego świata)?

Przyjęcie tezy ontologicznej, w myśl której obiekty matematyczne są redukowalne do zbiorów (czyli po prostu, że podstawowymi obiektami matematycznymi są zbiory), jest nie do przyjęcia dla zwolennika FBP – twierdzi on bowiem, że istnieją wszystkie logicznie możliwe obiekty matematyczne, a nie tylko obiekty matematyczne pewnego określonego typu (czyli zbiory). Balaguer jawnie twierdzi, że teoria mnogości jest po prostu jedną z wielu teorii, która bynajmniej nie jest metafizycznie wyróżniona. Zwolennik FBP powinien konsekwentnie przyjąć stanowisko liberalne. To jednak prowadzi do „rozmycia” pojęcia matematyczno-

³⁷ Takie jest np. stanowisko Gödla.

³⁸ Odrębnym problemem jest to, czy rekonstrukcja teoriomnogościowa faktycznie dobrze ujmuje pierwotne intuicje związane np. z pojęciami geometrycznymi czy analitycznymi. Należy też dodać, że posługiwanie się tą idealizacją prowadzi do swoistych artefaktów, np. niestandardowych modeli, powstających w wyniku przyjęcia „rozdętej” ontologii mnogościowej.

³⁹ Nie ma tu miejsca na szczegółową analizę problemu, ale można twierdzić, że teoriomnogościowa rekonstrukcja jest właśnie jedynie *rekonstrukcją*, która nie zdaje sprawy z ontycznej natury obiektów matematycznych. Za takim ujęciem przemawiają racje np. uznania liczb za obiekty, a nie za zbiory. Szereg argumentów przeciwko teoriomnogościowej rekonstrukcji podają strukturaliści (por. np. [Shapiro 1997], [Resnik 1998]) czy zwolennicy teorii kategorii rekonstrukcji matematyki (por. np. [Awodey 1996]).

ści i poważnych trudności – gdybyśmy chcieli posługiwać się wówczas pojęciem możliwego świata.

Przy takim bardzo mało precyzyjnym rozumieniu pojęcia teorii matematycznej i pojęcia ontycznego korelatu dla teorii matematycznej pojawiają się trudności związane z problemem referencji⁴⁰. Jak wówczas mielibyśmy w ogóle rozumieć pojęcie możliwego świata? Taki możliwy świat miałby być ontycznym korelatem dla niesprzecznej teorii matematycznej – ale sami nie za bardzo wiemy, co zasługuje na miano teorii matematycznej! W tej sytuacji mówienie o możliwych światach traci uchytny sens.

3.3. Światy możliwe a świat aktualny

Jednym z podstawowych przekonań realisty matematycznego jest to, że wiedza matematyczna ma obiektywny charakter. Swobodnie mówiąc, realista twierdzi, że na (przynajmniej niektóre) pytania matematyczne można znaleźć obiektywne odpowiedzi. Jednak przyjęcie koncepcji możliwych światów matematycznych prowadzi do rozmycia pojęcia wiedzy matematycznej i pozbawienia jej statusu obiektywności.

Ma to związek z naszym rozumieniem pojęcia prawdy matematycznej. Za bezdyskusyjne przyjmujemy założenie, że realista ma prawo się tą kategorią posługiwać. Jak należy rozumieć pojęcie prawdy matematycznej – jako prawdy w każdym możliwym świecie czy jako prawdy w świecie aktualnym? Ani Quine, ani Gödel nie mają takich problemów – mówią bowiem wyłącznie o świecie aktualnym⁴¹. Jak pojęcie prawdy matematycznej miałby rozumieć zwolennik FBP? Czy może on mówić o świecie aktualnym i w szczególności podać kryterium zidentyfikowania tego świata? Pojęcie świata aktualnego jest przedmiotem dyskusji w kontekstach modalnych (zaś w ujęciu formalnym wprowadzany jest operator aktualności @). Intuicje kryjące się za tym pojęciem (tak jak ja je rozumiem) są proste: nasz świat jest wyróżniony w ten sposób, że jest światem aktualnym, inne są jedynie możliwe.

⁴⁰ Zwraca na to uwagę np. Cheyne (jego uwagi dotyczą koncepcji FBP, ale zarazem mają charakter ogólny). Zauważa, że w sytuacji, w której nie został opisany mechanizm odnoszenia się terminów matematycznych do obiektów (tak jak to jest w przypadku FBP), teza FBP staje się pozbawioną sensu i nie wiadomo, co właściwie oznacza. Cheyne odwołuje się do następującej ilustracji: aby stwierdzić, czy *Jabberwocky* opisuje któryś z możliwych światów istniejących w myśl stanowiska modalnego realisty Lewisa, konieczne jest uprzednie ustalenie referencji terminów. Nie można bowiem inaczej w ogóle zrozumieć, czego dotyczy *Jabberwocky* – i tym samym stawianie tezy dotyczącej istnienia możliwego świata opisanego przez *Jabberwocky* nie miałoby sensu [Cheyne 1999, 172].

⁴¹ Gödel twierdził, że teorią opisującą świat matematyczny jest teoria mnogości (a odpowiedzi na pytania otwarte należy poszukiwać na drodze analizy pojęć i owocności aksjomatów). Quine twierdził, że teorię opisującą świat matematyczny można zidentyfikować poprzez analizę zobowiązań ontologicznych teorii zmatematyzowanych. Obaj mówią więc o obiektywnej wiedzy matematycznej.

Jednak w myśl stanowiska FBP wszystkie koncepcje (teorie) matematyczne są równoprawne. Wszystkie teorie matematyczne mają swoje odpowiedniki ontyczne, każda z nich odnosi się do pewnego fragmentu uniwersum matematycznego. Zarazem jednak żadnej z nich nie można wyróżnić jako teorii, która opisuje świat matematyczny, jako „The Theory”. Każda teoria matematyczna opisuje pewien świat (uniwersum) matematyczny. W jakich relacjach ontycznych są te uniwersa? Czy te relacje są opisane w jakiejś ogólniejszej „hiperteorii”?

Pytania te mają charakter spekulatywny, ale jeśli chcemy przyjąć koncepcję możliwych uniwersów (rozumianych *per se*, a nie jako modeli w uniwersum teoriomnogościowym) i zarazem szerokie, liberalne rozumienie granic matematyczności, to trzeba te pytania postawić. I nie wygląda na to, aby można było znaleźć zadowalające odpowiedzi.

III. Podsumowanie

Pojęcia modalne są używane przez antyrealistów, aby wyeliminować ontologię obiektów matematycznych. Nie zastępują oni jednak ontologii obiektów matematycznych ontologią abstrakcyjnych possybiliów, ale traktują pojęcia modalne jako pierwotne, przyjmując – w miejsce założeń ontologicznych, dotyczących abstrakcyjnych bytów – założenia „ideologiczne”, dotyczące pierwotności pojęć modalnych. Założenia te są jednak kontrowersyjne.

Gödel i Quine nie posługują się w ogóle kategorią możliwego świata. Stanowiskiem, które wydaje się być „kompatybilne” z użyciem pojęcia możliwego świata (uniwersum) matematycznego, jest stanowisko FBP. Jednak wprowadzenie kategorii możliwego uniwersum rodzi liczne problemy filozoficzne (m.in. problem kryterium identyczności, problem granic matematyczności, problem wskazania świata aktualnego), które powodują, że kategoria ta jest zbyt niejasna, aby można się nią było posługiwać w dyskursie filozoficznym.

Ostatecznie więc sądzę, że posługiwanie się kategorią możliwego świata matematycznego prowadzi do nieprzezwycięzalnych trudności, nic w zamian nie oferując. Dlatego sądzę, że posługiwanie się nim w dyskusjach filozoficznych nad matematyką jest jałowe.

Bibliografia

- Awodey S., [1996] „Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective”, „Philosophia Mathematica” 3, vol. 4, 209–237.
Cheyne C., [1999] „Problems with Profligate Platonism”, „Philosophia Mathematica” 7, 164–177.

- Chihara C., [1990] *Constructibility and mathematical existence*, Clarendon Press, Oxford.
- Colyvan M., Zalta E.N., [1999] „Mathematics: Truth and Fiction? Review of: Balaguer M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*”, „*Philosophia Mathematica*” 7, 336–349.
- Etchemendy J., [1990] *The concept of logical consequence*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- Field H., [1989] *Realism, mathematics and modality*. Blackwell, Oxford, Cambridge.
- Field H., [1991] „Metalogic and Modality”, „*Philosophical Studies*” 62, 1–22.
- Gödel K., [1944] „Russell’s Mathematical Logic”, w: *The Philosophy of Bertrand Russell*. Library of Living Philosophers, vol. 5, Schlipp P.A. (red.), Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 123–153. Przedrukowane w: [Benacerraf Putnam 1964], 211–232 (a także w [Gödel 1990], 119–141).
- Gödel K., [1947/64] „What is Cantor’s Continuum Problem?”, „*American Mathematical Monthly*” 54, 515–525. W rozszerzonej wersji przedrukowane w: [Benacerraf Putnam 1964], 258–273 (a także w: [Gödel 1990], 254–270).
- Gödel K., [1951] „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, w: [Gödel 1995], 304–323.
- Gödel K., [1953/9] „Is mathematics syntax of language?”, w: [Gödel 1995], 334–363.
- Gödel K., [1970a] „Some considerations leading to the probable conclusion, that the true power of the continuum is $\aleph_2$ ”, w: [Gödel 1995], 420–421.
- Gödel K., [1970b] „A proof of Cantor’s continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth”, w: [Gödel 1995], 422–423.
- Gödel K., [1990] *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. i.in. (red.), Oxford University Press.
- Gödel K., [1995] *Collected Works*, vol. 3., Feferman S. i.in (red.), Oxford University Press.
- Hellman G., [1989] *Mathematics without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.
- Hellman G., [2001] „Three Varieties of Mathematical Structuralism”, „*Philosophia Mathematica*” 9, 184–211.
- Hintikka J., [1997] *Lingua Universalis versus Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*. Kluwer, Dordrecht.
- Krajewski S., [2003] *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa.
- Kunen K., [1980] *Set Theory*, North-Holland.
- Maddy P., [1989] „The roots of contemporary platonism”, „*Journal of Symbolic Logic*” 54, 1121–1144.
- McGee V., [1992] „Two Problems with Tarski’s Theory of Consequence”, „*Proceedings of the Aristotelian Society*” 92, 273–92.

- Parsons C., [1990] „The structuralist view of mathematical objects”, „Synthese” 84, 303–346. Przekład polski (fragmenty) „Strukturalizm o obiektach matematyki”, w: *Współczesna filozofia matematyki*, Murawski R. (red.), PWN, Warszawa 2002, 359–376.
- Putnam H., [1967] „Mathematics without foundations”, „Journal of Philosophy” 64, 5–22, przedrukowane w: Benacerraf P., Putnam H. (red.), *Philosophy of Mathematics*, wydanie drugie, 1983, Cambridge University Press, Cambridge, 295–311.
- Quine W.V.O., [1953a] „On what there is”, w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, 1–19. Przekład polski: „O tym, co istnieje”, w: *Z punktu widzenia logiki*, red. i tłum. B. Stanosz, Warszawa: PWN, 1969, 9–34.
- Quine W.V.O., [1953b] „Two dogmas of empiricism”, w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, s. 20–46, przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu” w: *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: PWN, 1969, 35–70.
- Quine W.V.O., [1981] „Things and Their Place in Theories”, w: *Theories and Things*, Cambridge, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press, 1–23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach”, w: Szubka T. (red.): *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, TN KUL, 1995, 31–52.
- Quine W.V.O., [1984] „Review of Parsons C. *Mathematics in Philosophy*”, „Journal of Philosophy” 81, 783–794.
- Quine W.V.O., [1998] *Od bodźca do nauki*, tłum. B. Stanosz, Alatheia, Warszawa.
- Resnik M.D., [1998] *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford University Press, Oxford.
- Shapiro S., [1997] *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford University Press. New York, Oxford.
- Shapiro S., [2000] *Thinking about mathematics*, Oxford, Oxford University Press.
- Wang H., [1987] *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge.
- Wójtowicz K., [2001] „Some remarks on Hartry Field’s notion of logical consistency”, „Logic and Logical Philosophy” 9, 199–212.
- Wójtowicz K., [2003] *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa, Semper.

Why No Possible World is Mathematical

Key Words: *possible world, mathematical realism, full-blooded Platonism, identity*

The notion of possible mathematical world is discussed. The problem is analyzed from the point of view of two classical realistic stances in the philosophy of mathematics (Quine's realism and Gödel's Platonism), and from the point of view of Balaguer's full-blooded Platonism. Balaguer's stance seems to be compatible with the use of the notion of a possible mathematical world (a universe), but as a matter of fact it is not. If one adopts such a notion, several profound philosophical problems arise, concerning e.g. the criterion of identity, the problem of the "borders of mathematicity", the problem of singling out the actual world from a possible one. In conclusion the author claims that the notion of possible world is not clear enough to be used in ontological discussions concerning mathematics.