

Wojciech Krysztofiak

Modalna arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych: możliwe światy liczb

Słowa kluczowe: indeksowane liczby naturalne, arytmetyka, modalizacja arytmetyki, uogólnienie arytmetyki, liczby półcałkowite, liczby półwymiernie, liczby półrzeczywiste

Celem artykułu jest konstrukcja teorii formalnej, nazwanej modalną arytmetyką indeksowanych liczb naturalnych INA. Zgodnie z tą teorią można mówić o takich obiektach liczbowych, jak liczby naturalne z indeksami: $1_0, 1_1, 1_2, \dots, 2_0, 2_1, \dots$ itd. W świetle tej teorii istnieje wiele jedynek, wiele dwójek. Te liczne jedynek czy dwójek różnią się wyłącznie indeksami. Liczby zamieszkują światy możliwe, zwane osiami czasu, wyznaczonymi przez indeksy liczb. Co więcej, na takich liczbach można dokonywać rozmaitych działań arytmetycznych, takich jak dodawanie, mnożenie czy potęgowanie. Okazuje się także i to, że takie operacje jak dodawanie oraz mnożenie również można indeksować. Arytmetyka Peano PA jawi się w świetle prezentowanej konstrukcji jako jej konkretyzacja, wyprowadzalna z niej na mocy założenia o istnieniu dokładnie jednej indeksowanej osi czasowej (możliwego świata indeksowanych liczb naturalnych).

Uzasadnienie celu artykułu posiada charakter filozoficzny. Otóż, przyjmijmy zgodnie z epistemologią kantyzmu, że czas stanowi aprioryczną formę poznawczą służącą umysłowi w jego aktywności konceptualizowania rozmaitych treści poznawczych. Kant uważał, że w naszym umyśle funkcjonuje tylko jedna forma czasu (a także i przestrzeni), która jest przedmiotem poznania arytmetyki. Stanowisko Kanta można określić jako monizm tensalny, zgodnie z którym umysł konceptualizuje wszelkie treści poznawcze na jednej osi czasu (przy pomocy struktury jednoczasowej).

Bez wątpienia monizmu tensalnego nie da się utrzymać w odniesieniu do wszelkich aktów konceptualizacyjnych. W aktach konceptualizowania rozmaitych fabuł (literackich, filmowych czy mitologicznych) umysł na owe treści fabularne

często narzuca strukturę politensalną (wieloczasową). Kiedy mówimy, iż dana fabuła rozwija kilka wątków, to wówczas ujęcie tego wymaga narzucenia na treści fabularne struktury wieloczasowej – każdemu z procesów rozwijania danego wątku przyporządkowujemy odrębną oś czasową w trakcie recepcji danej fabuły (i zwykle te osie czasowe są powiązane jakimiś relacjami – choćby relacją fuzji w pewnym punkcie kulminacyjnym jednoczącym wszystkie wątki danej fabuły)¹. W konceptualizowaniu naszego życia codziennego również używamy struktur politensalnych; u niektórych życie zawodowe rozgrywa się na innej osi czasu niż oś czasu życia osobistego (rodzinnego); ma to miejsce wówczas, kiedy praca zawodowa jest dla nas „zmorą codzienności”, czymś męczącym. Inne sytuacje życiowe często są opisywane z użyciem metafory „podwójnego życia” czy „podwójnego domu”. Dzieci z rodzin rozbitych – kiedy równie często spędzają osobno czas z obu rodzicami – posiadają doświadczenie posiadania dwóch domów (jeden u „mamy”, drugi u „taty”); wówczas zdarzenia w jednym domu układają się w odmienną oś czasową od osi, na której są zlokalizowane zdarzenia z drugiego domu. Podobne doświadczenia posiadają niektórzy „bigamiści” – życie z „kochanką” może konstituować równoległą oś czasową do osi, na której rozgrywa się życie z „żoną”. Z pewnością w wielu procesach obliczeniowych jesteśmy uwikłani w struktury politensalne. Podczas przeprowadzania rozgałęzionego dowodu w sensie logicznym, każda gałąź konstituuje odmienną oś czasu obliczeniowego (kroki dowodowe na jednej podgałęzi są całkowicie niezależne od kroków dowodowych na pozostałych podgałęziach). Podane przykłady (z wielu rozmaitych płaszczyzn naszej aktywności mentalnej – od *Erosa* po *Logos* i *Ethos*) stanowią wystarczające potwierdzenie tezy, iż monizm tensalny jest stanowiskiem niezgodnym z faktami empirycznymi dotyczącymi naszych sposobów unifikowania naszego doświadczenia (estetycznego, obliczeniowego czy w końcu życiowego)².

To, że struktura monotensalna posiada swoją arytmetyczną reprezentację opisywaną przez aksjomaty arytmetyki Peano, jest intuicyjnie oczywiste. Wyłania się

¹ W najnowszych trendach teorii dzieła literackiego podejmuje się próby analizowania zjawiska rozwidłania się historii w opisach i odbiorze czytelnicznym na gruncie możliwościowych teorii tekstu literackiego. Badania takie zostały zapoczątkowane przez T. Paveła, L. Doleżela i U. Eco. W tym paradygmacie zjawisko politensalności fabuły interpretuje się jako sekwencje możliwych światów powiązanych relacjami dostępności o wspólnym elemencie początkowym, którym jest świat aktualny. Stan badań dotyczący możliwościowych teorii dzieła literackiego jest omówiony w pracy: Łebkowska A., *Fikcja jako możliwość. Z przemian prozy XX wieku*, TAIWPN „Universitas”: Kraków 1991, szczególnie, s. 35–67, 93–124.

² W naukach społecznych kategoria wielości czasów społecznych jest szeroko stosowana. Badacze pracujący w ramach paradygmatu socjologii wiedzy o proveniencji fenomenologicznej wręcz stwierdzają, że każda jednostka efektywnie żyje pośród wielu czasów społecznych, które wyznaczają „specjalną architekturę temporalną” współczesnej cywilizacji. Zob. Tarkowska E., *Czas w społeczeństwie. Problemy, tradycje, kierunki badań*, Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk: Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1987, szczególnie rozdz. „Wielość czasów społecznych”, s. 115–157.

jednak następujący problem: jeśli aprioryczna forma czasu, funkcjonująca w naszych umysłach, posiada charakter politensalny, to wówczas pod jaką strukturę podpada jej arytmetyczna reprezentacja? Arytmetyka Peano jest bowiem teorią tylko jednej „strzałki czasu” (osi czasu). Realizacja celu niniejszego artykułu stanowi właśnie próbę wykazania, że stanowisko Kanta, iż czasowość naszego umysłu posiada arytmetyczną reprezentację, pomimo odrzucenia monizmu tensalnego, jest zasadne, gdyż struktury politensalne dają się opisać w modalnej arytmetyce INA. Innymi słowy, jeśli umysł konceptualizuje swoje treści poznawcze (różnych typów) przy pomocy „pęków strzałek czasu”, to wówczas – jeśli Kant ma rację – iż forma czasowości jest arytmetyzowalna, forma politensalnej czasowości jest również arytmetyzowalna.

W pierwszej części są przedstawione filozoficzne preliminaria, stanowiące paradygmatyczną inspirację dla arytmetyki INA. Te preliminaryjne założenia można określić jako uogólnienie Kantowskiej filozofii arytmetyki. Druga część jest poświęcona aksjomatyce prezentowanej teorii oraz konstrukcji różnych działań (w szczególności: dodawania i mnożenia) na indeksowanych liczbach naturalnych. W trzeciej części zostanie zaprezentowany filozoficzny model arytmetyki INA, na gruncie którego podejmie się próbę objaśnienia modalnego charakteru arytmetyki INA. W szczególności pojęcie osiągalności między różnymi osiami czasu zostanie zdefiniowane, co z kolei umożliwi skonstruowanie pojęcia arytmetycznej prawdy koniecznej. Czwarta część jest poświęcona konstrukcji indeksowanych liczb całkowitych, półcałkowitych, wymiernych i półwymiernych. W zakończeniu są wyrażone pewne pytania metafizyczne, do których postawienia pobudza prezentowana szkicowo teoria formalna.

I. Filozoficzne preliminaria

Według Kanta arytmetyka jest teorią formy zmysłowości czasu. Wszystkie jednostkowe wrażenia zmysłowe dane są podmiotowi w strukturze czasu i przestrzeni (są zawsze obecne teraz i w jakimś miejscu jako następstwa innych wrażeń rozpostartych również w jakimś miejscu oraz jako poprzedzające inne wrażenia, które nastąpią za chwilę także w pewnym miejscu). Niemożliwe jest doznawanie wrażeń poza czasem ani także poza przestrzenią. Czas i przestrzeń jest tym czymś, co podmiot poznający jest w stanie sobie przedstawić w czystej naoczności poza kontekstem wrażeń. Ponieważ arytmetyka i geometria są odpowiednio teoriami czasu i przestrzeni oraz są to systemy sądów syntetycznych *a priori*, zatem ani czas, ani przestrzeń nie mogą stanowić form naoczności wrażeń; nie są doznawane percepcyjnie (arytmetyka byłaby wówczas systemem sądów *a posteriori*). Zdaniem Kanta czas i przestrzeń dane są przed wszelkim doświadczeniem w taki sposób, że są immanentne podmiotowi. Podmiot jest w stanie w sposób naoczny przedstawić sobie obie czyste formy zmysłowości. Arytmetyka

jest więc opisem formy naoczności czasu. Podobnie geometria jest systemem sądów opisujących czystą naoczność przestrzeni³.

Arytmetyka Peano stanowi teorię pewnej struktury algebraicznej, w której jest wyróżniony element pierwszy (stanowiący generator tejże struktury) jako zero oraz jednoargumentowa operacja następstwa posiadająca w pewien sposób „swój kierunek”. Elementy dziedziny tejże struktury algebraicznej są uporządkowanym liniowo, nieskończonym zbiorem liczb. Czas w tym wypadku może być ujęty jako porządek wyznaczony przez jego elementy i liniowo porządkującą te elementy funkcję (relację) następstwa. Operacje arytmetyczne, dodawanie, mnożenie, potęgowanie czy operacja silni, są wówczas działaniami przyporządkowującymi chwilom-liczbom pewne inne chwile-liczby. Z punktu widzenia Kantowskiej filozofii, w naszym umyśle są zakodowane: jedna forma przestrzeni i jedna forma czasu. Stąd należy wnioskować, iż istnieje tylko jedna geometria i tylko jedna arytmetyka.

Dzieje matematyki pokazały, że istnieje wiele teorii opisujących rozmaite przestrzenie geometryczne. Co więcej, geometrie te są „konkurencyjne”. Można by więc wnioskować, że nie istnieje zakodowana w umyśle tylko jedna forma przestrzeni. Umysł z uwagi na swoje potrzeby poznawcze „wybiera” dla aktów percepcji np. przestrzeń euklidesową. W aktach modelowania może jednak wybrać przestrzeń nieeuklidesową. Podobnej analizy nie można jednak zastosować do analizy czasu. Nie skonstruowano dotychczas jakiegokolwiek nieklasycznej arytmetyki konkurencyjnej względem arytmetyki Peano (co najwyżej można mówić o pewnych subteoriach arytmetyki Peano, jak na przykład: arytmetyka Pressburgera).

Z drugiej jednak strony, idea wielości osi czasowych czy czasu kolistego jest eksplorowana we współczesnej modalnej logice filozoficznej. W logikach temporalnych (oraz tensalnych) można wyrazić rozmaite strukturalne własności czasu: liniowość, rozgałęzienie czy kolistość. Innymi słowy, można formalnie opisać sytuację wielości linii czasowych, a więc wielości czasów. Przy czym taka wielość czasów jako rozgałęzień jakiegokolwiek czasu jest opisywana na gruncie jednej struktury temporalnej (modelowanej w semantyce możliwych światów formalnymi właściwościami relacji osiągalności)⁴. Jeśli czas liniowy posiada swoją reprezentację w postaci ukierunkowanego zbioru liczb naturalnych (od zera w nieskończoność), to wydaje się zasadnym postawienie następującego pytania: jaką reprezentację liczbową posiada czas rozgałęziony (choćby taki, który jest modelowany w logikach temporalnych)? Co więcej, jeśli szczególnym wypadkiem czasu rozgałęzionego jest czas liniowy (jest to czas rozgałęziony o jednej gałęzi), to skoro czas liniowy jest reprezentowany przez ukierunkowany zbiór liczb naturalnych, zasadne jest zatem postawienie hipotezy, że ów zbiór liczb

³ Zob. Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN: Warszawa 1995, s. 51–56.

⁴ Zob. na temat rozmaitych sposobów modelowania różnych struktur temporalnych w logice, Świrydowicz K., *Podstawy logiki modalnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM: Poznań 2004, s. 148–171.

naturalnych jest również szczególnym wypadkiem jakiejś ogólniejszej struktury liczbowej izomorficznej ze strukturą czasu rozgałęzionego. Z punktu widzenia Kantowskiego paradygmatu epistemologii można by taką strukturę potraktować jako generator rozmaitych politensalnych form czasu, w szczególności formy czasu liniowego.

Czas jako kategoria ontologiczna jest rozumiany jako zbiór momentów uporządkowany przez pewną relację. Można mówić o rozmaitych relacjach porządkujących zbiór momentów: relacja *wcześniej*, relacja *między* czy relacja rozdzielania par momentów. W klasycznie pojmowanym czasie jego zbiór momentów jest uporządkowany liniowo⁵. Z punktu widzenia Kantowskiej koncepcji czasu każda taka monotensalna struktura o postaci $\langle M, R \rangle$ jest arytmetyzowalna, czyli daje się opisać jako przedmiot badania arytmetyki. W strukturach politensalnych obok zbioru momentów występuje dodatkowo zbiór osi czasowych, na których momenty są uporządkowane liniowo, na każdej osi w inny sposób, przez określoną relację. Strukturze politensalnej czasu można zatem przypisać kształt o postaci $\langle M, O, R \rangle$, gdzie O jest zbiorem osi czasowych. Arytmetyzacja struktury $\langle M, R \rangle$ jest więc jej odwzorowaniem w strukturę: $\langle L, R^* \rangle$, gdzie L jest określonym uniwersum wszystkich liczb danego typu (naturalnych, wymiernych lub rzeczywistych), zaś R^* jest relacją liniowo porządkującą zbiór L . W wypadku czasu dyskretnego zbiór momentów M jest odwzorowywany na zbiór liczb naturalnych N , zaś relacja R jest odwzorowywana na relację (funkcję) następnika *Seq*. Aby wykazać, że struktura politensalna czasu $\langle M, O, R \rangle$ jest również arytmetyzowalna, należy więc odwzorować zbiór osi czasowych O na odpowiednią strukturę arytmetyczną. W wypadku politensalnej struktury czasu dyskretnego zbiór O należy odwzorować na jakąś strukturę arytmetyczną określoną na liczbach naturalnych.

W strukturze politensalnej czasu należy odróżnić momenty od chwil. Każdy moment zajmuje na danej osi czasowej dokładnie jedną chwilę i na różnych osiach ten sam moment zajmuje inne chwile. W wypadku monotensalnej struktury czasu, momenty i chwile są tym samym. Chwile można – w wypadku czasu dyskretnego – liczyć i tym samym można liczyć momenty przyporządkowane danym chwilom na danej osi. Relacja R stanowi zatem relację porządkującą liniowo chwile na danej osi czasowej (a pośrednio również momenty im przyporządkowane). Jeśli więc dowolną chwilę z danej osi czasowej potraktuje się jako obraz momentu z uwagi na daną oś, to wówczas naturalne jest potraktowanie osi czasowych jako funkcji przekształcających zbiór momentów w zbiory chwil danej osi; przy czym każda oś byłaby złożona ze „swoich, własnych chwil”. Innymi słowy, osie czasowe jako uporządkowane liniowo zbiory chwil są rozłączne. Natomiast wówczas,

⁵ Zob. na temat struktury formalnej czasu: Augustynek Z., *Natura czasu*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe: Warszawa 1975, s. 38–60.

kiedy są one rozpatrywane jako reprezentowane przez zbiory momentów, są nieodróżnialne. Mówiąc metaforycznie, momenty stanowią „logiczną materię” czasu, podczas gdy chwile wyznaczone przez osie czasowe stanowią jego uformowanie. Chwile każdej osi czasowej są tym, co porządkuje momenty na mocy funkcji przyporządkowania ich chwilom.

II. Aksjomatyka arytmetyki INA

Arytmetyka INA stanowi teorię sformułowaną w języku rachunku predykatów drugiego rzędu, z kwantyfikowanymi zmiennymi funkcyjnymi oraz standardowo z kwantyfikowanymi zmiennymi indywiduowymi. Zatem arytmetyka INA – w przeciwieństwie do arytmetyki PA – nie jest teorią elementarną. Źródłem tej nieelementarności jest założenie o istnieniu co najmniej jednej osi czasowej rozumianej jako zbiór swoich chwil.

1. Język arytmetyki INA

Na język arytmetyki INA – poza standardowymi terminami logicznymi – składają się wyrażenia następujących kategorii składniowych: (i) zmienne indywiduowe przebiegające uniwersum obiektów elementarnych (momentów czasowych), oznaczane literami: x, y, z ; (ii) stała indywiduowa: 0 oraz stałe indywiduowe desygnujące ustalone, niewyspecyfikowane obiekty uniwersum obiektów elementarnych, oznaczane literami: x, y, z ; (iii) zmienne funkcyjne (zmienne indeksowe) przebiegające zbiór osi czasowych, oznaczane literami: i, j, k, l, m ; (iv) stałe funkcyjne (stałe indeksowe) oznaczające ustalone, niewyspecyfikowane osie czasowe: i, j, k, l, m ; (v) predykat N wyrażający własność bycia indeksowaną liczbą naturalną; (vi) stała funkcyjna S , która z wyrażeniami indeksowymi (zmiennymi lub stałymi) tworzy indeksowane funkcje następnika, oznaczane literami: S_i, S_j, S_k, S_l itd; (vii) stałe liczebnikowe oznaczające poszczególne indeksowane liczby naturalne kształtu: $1_i, 1_j, 2_i, 2_j, 2_k$ itd. (stałe tego rodzaju są wprowadzane do systemu definicyjnie); (viii) zmienne liczebnikowe (ze zmienną indeksową) o postaci: $1_i, 1_j, 2_i, 2_j, 2_k$ itd. (również wprowadzane definicyjnie do systemu); (ix) nawiasy zwykłe i kwadratowe (pierwsze są używane w kontekstach predykatywnych, drugie zaś w kontekstach funkcyjnych)

Język arytmetyki INA obejmuje dwie odrębne kategorie syntaktyczne wyrażen indywiduowych. Pierwszą kategorię P tworzą wyrażenia przedmiotowe typu: (i) oraz (ii), służące reprezentowaniu lub oznaczaniu obiektów elementarnych (momentów czasowych). Drugą kategorię wyrażen indywiduowych tworzą wyrażenia liczebnikowe L . Przy czym kategoria L jest wtórną kategorią syntaktyczną. Niech I stanowi kategorię wyrażen indeksowych, zaś F stanowi kategorię nieindeksowych wyrażen funkcyjnych (przy czym kategorie F oraz I są rozłączne). Wówczas kategorię wyrażen L definiujemy indukcyjnie następująco:

- (Df. L) (i) $\alpha \in P \wedge \beta \in I \rightarrow \beta[\alpha] \in L$
 (ii) $\alpha \in L \wedge \beta \in F \rightarrow \beta[\alpha] \in L$

Zgodnie z (Df. L) wyrażenia liczebnikowe reprezentują lub oznaczają obiekty (indeksowane liczby naturalne) stanowiące wartości funkcji indeksowych (osi czasu) od argumentów, którymi są przedmioty oznaczane lub reprezentowane przez stałe lub zmienne kategorii P . Każdy taki przedmiot będzie określany jako podstawa przedmiotowa korespondujących z nim – na mocy funkcji indeksowych – indeksowanych liczb naturalnych. Każda indeksowana liczba naturalna posiada jedną podstawę przedmiotową, podczas gdy dany obiekt może być podstawą przedmiotową wielu indeksowanych liczb naturalnych (tytu, ile jest zakładanych osi czasowych przez daną teorię sformułowaną w języku INA). Zgodnie z (i) wyrażeniami liczebnikowymi są na przykład: $i[x]$, $i[0]$, $i[0]$, $i[x]$, $i[x]$. Zgodnie z (ii) wyrażeniami liczebnikowymi są między innymi: $S_i[i[x]]$, $S_j[i[x]]$, $S_i[i[x]]$, $S_i S_i[i[x]]$, $S_i S_i[i[0]]$ (nawiasy kwadratowe po wyrażeniu funkcji następnika są pominięte) itd. Wyrażenia liczebnikowe dzielą się na dwie subkategorie: zmienne liczebnikowe oraz stałe liczebnikowe. Zmienne liczebnikowe L_{zm} są wyrażeniami liczebnikowymi, które – rozpatrywane jako konkatencje wyrażań słownikowych – są zbudowane z co najmniej jednej zmiennej indeksowej lub co najmniej jednej zmiennej przedmiotowej. Na przykład, wyrażenia kształtu: $i[x]$, $i[0]$, $S_j[i[x]]$, $S_i[i[x]]$, $S_i S_i[i[x]]$, należą do subkategorii L_{zm} . Stałe liczebnikowe L_{st} są wyrażeniami liczebnikowymi, które – rozpatrywane jako konkatencje wyrażań słownikowych – nie są zbudowane z jakichkolwiek zmiennych. Stałymi liczebnikowymi są na przykład takie, jak: $i[0]$, $S_i S_i[i[0]]$, $i[x]$. Stałe liczebnikowe oznaczają więc ustalone indeksowane liczby naturalne (ustalone chwile na ustalonych osiach czasowych). Natomiast subkategoria zmiennych liczebnikowych rozpada się ze względu na kryteria semantyczne na trzy typy: (i) zmienne liczebnikowe przebiegające całe uniwersum indeksowanych liczb naturalnych (na przykład: $i[x]$, $i[y]$); (ii) zmienne liczebnikowe przebiegające zbiory indeksowanych liczb naturalnych o tej samej podstawie przedmiotowej (na przykład: $i[x]$, $i[y]$); (iii) zmienne liczebnikowe przebiegające zbiory indeksowanych liczb naturalnych z tej samej osi czasowej (na przykład: $i[x]$, $j[y]$).

Wśród stałych liczebnikowych można wyróżnić specjalną subkategorię wyrażań, które są określane jako liczebniki. Przyjmijmy następującą konwencję metajęzykową: jeśli wyrażenie α jest wyrażeniem języka przedmiotowego, to wyrażenie $(\alpha)^*$ jest nazwą wyrażenia α w metajęzyku danego języka przedmiotowego. Kategoria liczebników L jest zdefiniowana następująco (przy czym α_i jest wyrażeniem liczebnikowym z dokładnie jednym indeksem i):

- (Df. L) (i) $(i[0])^* \in L$, dla dowolnego indeksu i
 (ii) $\alpha_i \in L \equiv (S_i[\alpha_i])^* \in L$

Liczebniki tworzą więc ciągi (dla dowolnego indeksu funktora następnika) następujących wyrażeń liczebnikowych: $i[0]$, $S_i[i[0]]$, $S_i S_i[i[0]]$, $S_i S_i S_i[i[0]]$ itd. W zbiorze liczebników L można wyróżnić podzbiory liczebników z uwagi na indeks operacji następnika. Zatem L można definiować jako sumę rodziny zbiorów o postaci L_i , L_j itd. Jeśli zbiór indeksów jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to wówczas indeksom można przypisać ich numery. Każda i -ta oś czasowa jest skorelowana z subkategorią liczebników L_i . Innymi słowy, każda i -ta oś czasowa jest zbiorem indeksowanych liczb naturalnych oznaczanych przez wszystkie stałe liczebniki subkategorii L_i . Dodać należy, że nie każda stała liczebnikowa jest liczebnikiem. Na przykład stałe liczebnikowe: $i[x]$, $j[y]$, nie są liczebnikami. Jednakże każda stała liczebnikowa jest kodesygnacyjna z dokładnie jednym liczebnikiem. Liczebniki więc można traktować jako kanoniczne sposoby desygnowania indeksowanych liczb naturalnych.

Ponieważ liczebniki mogą być bardzo długimi wyrażeniami (np. zbudowanymi przy pomocy milionowych iteracji funkcji i -tego następnika), do języka arytmetyki INA należy wprowadzić definicyjnie kategorię indeksowanych cyfr jako skrótów notacyjnych dla liczebników. I tak, dla przykładu, do systemu arytmetyki INA można wprowadzić następujące indeksowane cyfry: $0_i = i[0]$, $1_i = S_i[i[0]]$, $2_i = S_i S_i[i[0]]$, $1_i = S_i[i[0]]$, $2_i = S_i S_i[i[0]]$. Kategorię indeksowanych cyfr (liczebników) można podzielić na dwie subkategorie: stałych cyfrowych (stałych liczebników) oraz zmiennych cyfrowych (zmiennych liczebników). I tak „ 1_i ” jest zmienną cyfrową, podczas gdy „ 1_i ” jest stałą cyfrową. Pierwsze z wyrażeń nie oznacza bowiem żadnej ustalonej indeksowanej liczby naturalnej. Wyrażenie „ 1_i ” reprezentuje zbiór indeksowanych liczb naturalnych stanowiących na poszczególnych osiach czasowych następniki liczby zero. Jeśli w danej teorii przyjmuje się istnienie nieskończonej liczby osi czasowych, to wówczas wyrażenia kształtu: „ 1_i ”, „ 2_i ”, „ 3_i ” itd., przebiegają nieskończone zbiory indeksowanych liczb naturalnych. Dodać należy, że indeksowane cyfry stanowią wyrażenia nierozkładalne składniowo. Wyrażenia „ 1_i ” nie można traktować jako złożonego z cyfry „ 1 ” oraz zmiennej indeksowej (funkcyjnej) „ i ”. Zwykłe cyfry nie należą bowiem do słownika języka arytmetyki INA.

Język arytmetyki INA pozwala więc na wyrażenie tego, że istnieje wiele funkcji następnika, o ile zbiór indeksów I jest zbiorem co najmniej dwuelementowym. Funkcji następnika (a więc osi czasowych) jest tyle, ile jest różnych indeksów w zbiorze I . Jeśli przyjmie się założenie konkretyzacyjne, że zbiór indeksów I jest jednoelementowy, to wówczas należy wnioskować, że istnieje dokładnie jedna funkcja następnika, a w konsekwencji – dokładnie jedna oś czasu liniowego.

2. Aksjomatyka arytmetyki INA

Aksjomatyka arytmetyki INA obejmuje trzy typy aksjomatów: (i) aksjomaty charakteryzujące uniwersa momentów i osi czasowych w abstrakcji od funkcji następnika; (ii) aksjomaty charakteryzujące indeksowane funkcje następnika; (iii) aksjomaty definiujące rozmaite działania na indeksowanych liczbach naturalnych.

Aksjomaty charakteryzujące uniwersa momentów i osi czasowych

$$(A1) \quad (\exists x) x = 0$$

$$(A2) \quad (\forall i) (\forall j) i[0] = j[0]$$

Zgodnie z (A1) istnieje moment zerowy. (A2) wyraża zaś dodatkowo to, iż moment zerowy jest na każdej osi czasowej przyporządkowany tej samej chwili. Zgodnie z definicją liczebników z (A2) wynika teza (T1): $(\forall i) (\forall j) 0_i = 0_j$. Zgodnie z (T1) istnieje dokładnie jedna indeksowana liczba naturalna 0 (ponieważ indeksy nie różnicują zera, wolno przyjąć następującą konwencję definicyjną: $(\forall i) 0_i = 0$).

$$(A3) \quad (\forall i) (\forall j) (\forall x)(x \neq 0 \wedge i \neq j \rightarrow i[x] \neq j[x])$$

Zgodnie z (A3) indeksowane liczby naturalne o różnych indeksach, lecz o identycznej podstawie przedmiotowej, która nie jest identyczna z momentem 0, są różnymi liczbami. Z aksjomatu (A3) wynikają twierdzenia podpadające pod następujący metaschemat (T2): $\alpha_\beta \in L \wedge \alpha_\gamma \in L \wedge \beta \neq \gamma \wedge \alpha_\beta \neq (0)^* \rightarrow \alpha_\beta \neq \alpha_\gamma$. Dwa liczebniki różniące się wyłącznie indeksem, które nie desygnują liczby zero, desygnują różne indeksowane liczby naturalne. Na mocy (T2) zachodzą twierdzenia tworzące następujący, nieskończony ciąg: $(\forall i) (\forall j)(i \neq j \rightarrow 1_i \neq 1_j)$, $(\forall i) (\forall j)(i \neq j \rightarrow 2_i \neq 2_j)$, $(\forall i) (\forall j)(i \neq j \rightarrow 3_i \neq 3_j)$ itd.

$$(A4) \quad (\forall i) (\forall j) (\forall x) (\forall y) (i[x] = j[y] \rightarrow x = y)$$

Aksjomat (A4) wyraża to, że jeśli dwie indeksowane liczby są identyczne, to ich podstawy przedmiotowe są również identyczne. Innymi słowy, na danej osi czasu w tej samej chwili nie mogą występować dwa różne momenty. W strukturze monotensalnej (kiedy momenty i chwile są utożsamione) oznacza to, że daną chwilę reprezentuje dokładnie jeden liczebnik. Z aksjomatów (A3) i (A4) wynika kryterium (T3) identyczności indeksowanych liczb niebędących liczbą zero: $(\forall i) (\forall j) (\forall x) (\forall y) (x \neq 0 \rightarrow (i[x] = j[y] \rightarrow x = y \wedge i = j))$. Dwie niezerowe liczby są identyczne wtedy, gdy posiadają identyczną podstawę przedmiotową i należą do tej samej osi czasowej.

$$(A5) \quad (\forall i) (\forall x) N(i[x])$$

Zgodnie z (A5) dowolny obiekt uzyskany w wyniku zastosowania dowolnej osi czasu (funkcji) do dowolnego momentu (argumentu) jest indeksowaną liczbą naturalną (momentem w danej chwili na danej osi czasu). Z (A5) wynika twierdzenie (T4): $(\forall i) N(i[0])$. Z kolei z (T4) i (T1) oraz definicji liczebników otrzymujemy: (T5) $N(0)$ (zero jest indeksowaną liczbą naturalną).

Aksjomaty charakteryzujące indeksowane funkcje następników

$$(A6) \quad (\forall i) (\forall x)(\exists y) S_i[i[x]] = i[y]$$

Aksjomat (A6) wyraża to, że i -ta funkcja następnika przyporządkowuje dowolnej i -tej liczbie naturalnej również jakąś indeksowaną liczbę naturalną. Innymi słowy, funkcja następnika na danej osi czasowej przyporządkowuje dowolnej, indeksowanej tą osią liczbie naturalnej również indeksowaną tą osią liczbę naturalną. Z aksjomatów (A6) oraz (A5) wynika twierdzenie (T6): $(\forall i) (\forall x) N(S_i[i[x]])$. Zgodnie z (T6) każdy następnik jakiejś indeksowanej liczby naturalnej na danej osi jest również indeksowaną liczbą naturalną.

$$(A7) \quad (\forall i) (\forall j) (\forall x) (i \neq j \rightarrow S_i[j[x]] = i[0])$$

Zgodnie z (A7) jeśli i -ta funkcja następnika jest stosowana do indeksowanych liczb naturalnych z innej osi czasowej niż i , to wówczas wartością tej funkcji jest liczba zero. Innymi słowy, stosowanie funkcji następnika z danej osi czasowej do obiektu z innej osi czasowej jest niewłaściwe i ta niewłaściwość manifestuje się tym, że rezultatem takiej aplikacji funkcji następnika z danej osi czasowej jest zawsze liczba zero. Z (A7) oraz (A2) i definicji liczebników, a także konwencji wprowadzającej do systemu cyfrę 0, wynika (T7): $(\forall i) (\forall j) (\forall x) (i \neq j \rightarrow S_i[j[x]] = 0)$. Ponadto z (A7) i (T6) wyprowadzane jest twierdzenie (T8): $(\forall i) (\forall j) (\forall x) N(S_i[j[x]])$. Zgodnie z (T8) wszystkie następniki, z uwagi na dowolną oś czasową, w odniesieniu do dowolnej indeksowanej liczby naturalnej, są liczbami naturalnymi. Funkcja następnika nie wyprowadza więc poza uniwersum indeksowanych liczb naturalnych.

$$(A8) \quad (\forall i) (\forall x) S_i[i[x]] \neq i[0]$$

Zgodnie z (A8) liczba $i[0]$ nie jest następnikiem na danej osi czasowej żadnej liczby z tejże osi czasowej. Jeśli i -ta funkcja następnika jest właściwie stosowana, to do zbioru jej wartości nie należy liczba $i[0]$. Ponieważ istnieje dokładnie jedno indeksowane zero (zgodnie z (A2)), to wobec tego (A8) można przekształcić na

(T9): $(\forall i) (\forall x) S_i[i[x]] \neq 0$. Z aksjomatów (A8), (A6), (A4) i (A3) wyprowadzić można twierdzenie (T10): $(\forall i) (\forall j) (\forall x) (\forall y) (i \neq j \rightarrow S_i[i[x]] \neq j[y])$. Zgodnie z (T10) funkcja następnika na i -tej osi czasowej nie wyprowadza poza tę oś. Na gruncie tych samych aksjomatów udowodnić można inne twierdzenie (T11): $(\forall i) (\forall j) (\forall x) (\forall y) (S_i[i[x]] = S_j[j[y]] \rightarrow i = j)$. (T11) wyraża to, że następnik liczby z danej osi czasowej nie może być tożsamy z następnikiem jakiegś liczby z innej osi czasowej.

$$(A9) \quad (\forall i) (\forall x) (\forall y) (S_i[i[x]] = S_i[i[y]] \rightarrow i[x] = i[y])$$

Zgodnie z (A9), jeśli następniki na danej osi czasowej dwóch liczb z tej osi są identyczne, to te liczby są jedną i tą samą indeksowaną liczbą naturalną.

$$(A10) \quad (\forall i) \{ \Psi(0) \wedge (\forall x) (\Psi(i[x]) \rightarrow \Psi(S_i[i[x]])) \rightarrow (\forall x) \Psi(i[x]) \}$$

(A10) jest zasadą indukcji, a więc – analogicznie jak w PA – schematem aksjomatów. Dla dowolnej osi czasowej jest tak, że jeśli 0 spełnia funkcję zdaniową $\Psi(i[x])$ oraz jeśli jest tak, że dla każdego przedmiotu x , jeśli indeksowana liczba naturalna, której podstawą przedmiotową jest x , spełnia daną funkcję zdaniową, to następnik tej liczby na danej osi czasowej również spełnia daną funkcję zdaniową, to każda liczba naturalna danej osi czasowej spełnia funkcję zdaniową $\Psi(i[x])$. Innymi słowy, (A10) wyraża to, że standardowa zasada indukcji stosuje się do każdej osi czasowej. Na gruncie (A9) i (A10), dowodzi się twierdzenia (T12): $(\forall i) (\forall x) S_i[i[x]] \neq i[x]$. Zgodnie z (T12) i -ta funkcja następnika w aplikacji do i -tej osi czasowej nie jest funkcją tożsamościową.

3. Działania na indeksowanych liczbach naturalnych w arytmetyce INA

W arytmetyce INA można rekurencyjnie zdefiniować, między innymi, indeksowane operacje: dodawania, mnożenia, potęgowania, odejmowania, silni itd. Standardowe operacje na liczbach naturalnych, zdefiniowane w arytmetyce Peano, okazują się być odpowiednimi, indeksowanymi operacjami w sytuacji, kiedy zbiór indeksów (osi czasowych) jest jednoelementowy.

Indeksowane dodawanie

Intuicyjnie, i -ta operacja dodawania jest dodawaniem wykonywanym na i -tej osi czasowej. Jeśli dodajemy na i -tej osi czasowej indeksowane liczby naturalne z różnych osi, to aby wykonać taką operację, najpierw należy odwzorować dodawane liczby w oś czasową, na której dodawanie ma być przeprowadzone. Formalnie definicja operacji k -tego dodawania przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 (\text{Df } +_k) \quad (1) \quad & k[0] +_k k[x] = k[x] \\
 (2) \quad & S_k[k[x]] +_k k[y] = S_k[k[x] +_k k[y]] \\
 (3) \quad & i[x] +_k j[y] = k[x] +_k k[y]
 \end{aligned}$$

To, jak „pracuje” definicja $(\text{Df } +_k)$, można pokazać na następującym przykładzie (o ile: $1_i = i[x]$, $1_k = k[x]$, $2_j = j[y]$, $2_k = k[y]$): (1) $1_i +_k 2_j = 1_k +_k 2_k$ (na mocy warunku 3 w $(\text{Df } +_k)$ i założeń wstępnych); (2) $1_k +_k 2_k = S_k[k[0]] +_k 2_k$ (na mocy definicji: $1_k = S_k[k[0]]$); (3) $S_k[k[0]] +_k 2_k = S_k[k[0] +_k 2_k]$ (na mocy warunku 2); (4) $S_k[k[0] +_k 2_k] = S_k(2_k)$ (na mocy warunku 1); (5) $S_k(2_k) = S_k S_k S_k[k[0]]$ (na mocy definicji liczby 2_k); (6) $S_k S_k S_k[k[0]] = S_k S_k S_k[0]$ (na mocy aksjomatu A2 i konwencji definiującej 0). Zatem wnioskujemy, iż: (7) $1_i +_k 2_j = S_k S_k S_k[0]$; Z (7) i definicji liczebnika 3_k otrzymujemy: (8) $1_i +_k 2_j = 3_k$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dodanie dwóch indeksowanych liczb naturalnych z dowolnych osi czasowych na trzeciej, różnej od danych osi czasowych, wymaga, zgodnie z warunkiem (3) w $(\text{Df } +_k)$, znalezienia odpowiedników dodawanych liczb na osi, na której wykonywana jest operacja dodawania. W przykładzie powyżej taka odpowiedniość została ustalona poprzez założenia: $1_i = i[x]$, $1_k = k[x]$, $2_j = j[y]$, $2_k = k[y]$. Uogólniając, żeby wykonywać dowolne operacje na cyfrach w danej przestrzeni osi czasowych, należy dysponować określoną relacją odpowiedniości. Jeśli relacja odpowiedniości nie jest określona dla pewnych osi czasowych danej przestrzeni osi, to wówczas operacje matematyczne na liczebnikach są wykonalne jedynie w sytuacji, gdy liczebniki „leżą” na jednej osi czasowej.

Jeśli w uniwersum indeksów (osi czasowych) są określone i wykonalne rozmaite funkcje, to skonstruować można schemat definicji operacji dodawania indeksowanych liczb naturalnych z uwagi na funkcję F od indeksów dodawanych liczb.

$$(\text{Df } \oplus_F) \quad i[x] \oplus_F j[y] = i[x] +_{F(i, j)} j[y]$$

Operatory typu $\oplus_F$ funkcjonują w taki sposób, że najpierw przez obliczenie wartości funkcji $F(i, j)$ znajdujemy odpowiednią oś czasu i następnie na tej osi dokonujemy dodania indeksowanych liczb naturalnych. Operacji typu $\oplus_F$ jest tyle, ile jest funkcji F określonych w zbiorze indeksów (osi czasowych).

Indeksowane mnożenie

Operacja k -tego mnożenia definiowana jest w dwóch krokach indukcyjnych:

$$\begin{aligned}
 (\text{Df } \cdot_k) \quad (1) \quad & i[0] \cdot_k i[x] = 0 \\
 (2) \quad & S_i[i[x]] \cdot_k j[y] = (i[x] \cdot_k j[y]) +_k j[y]
 \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że operacja k -tego mnożenia jest stowarzyszona z operacją k -tego dodawania. Nie ma technicznych przeszkód, aby stowarzyszyć k -tą operację mnożenia z i -tą operacją dodawania. Wówczas należałoby zdefiniować operator mnożenia podwójnie indeksowany: $\cdot_{k,h}$, gdzie pierwszy indeks oznacza oś czasu, na której wykonujemy mnożenie, zaś drugi indeks oznacza h -tą operację dodawania użytą w definicji.

$$\begin{aligned} (\text{Df } \cdot_{k,h}) \quad (1) \quad i[0] \cdot_{k,h} i[x] &= 0 \\ (2) \quad S_i[i[x]] \cdot_{k,h} j[y] &= (i[x] \cdot_{k,h} j[y]) +_h j[y] \end{aligned}$$

Okazuje się, że operator mnożenia, podwójnie indeksowany indeksami i, h , jest identyczny z operatorem mnożenia pojedynczo indeksowanym indeksem h :
(T13) $\cdot_{k,h} = \cdot_h$

W arytmetyce INA można zdefiniować rodzinę operacji mnożenia, wyznaczanych przez funkcje arytmetyczne określone i wykonalne w zbiorze indeksów. Niech F będzie dowolną dwuargumentową funkcją określoną i wykonalną w uniwersum indeksów.

$$\begin{aligned} (\text{Df } \cdot_F) \quad (1) \quad i[0] \cdot_F i[x] &= 0 \\ (2) \quad S_i[i[x]] \cdot_F j[y] &= (i[x] \cdot_F j[y]) +_{F(i,j)} j[y] \end{aligned}$$

Liczebność operacji mnożenia typu: $\cdot_F$, zależy od liczebności uniwersum indeksów (osi czasowych).

Pozostałe operacje arytmetyczne

W arytmetyce INA zdefiniować można operację silni oraz potęgowanie, a także funkcję poprzednika czy w końcu odejmowanie. Wszystkie operacje arytmetyczne, które są definiowalne na gruncie PA, posiadają swoje odpowiedniki w arytmetyce INA.

Operacje: silni oraz potęgowania, są zdefiniowane indukcyjnie następującymi wzorami (gdzie $!$ to operator silni, zaś ∇_k to operator k -tego potęgowania, którego lewy argument jest podstawą potęgowania, zaś prawy argument wykładnikiem):

$$\begin{aligned} (\text{Df. } !) \quad (1) \quad i[0]!_j &= S_j(0) \\ (2) \quad S_i[i[x]]!_j &= i[x]!_j \cdot_j (S_i[i[x]]) \\ (\text{Df. } x^y) \quad (1) \quad \nabla_k(i[x], i[0]) &= S_k[i[0]] \\ (2) \quad \nabla_k(i[x], S_j[j[y]]) &= \nabla_k(i[x], j[y]) \cdot_k i[x] \end{aligned}$$

Operacja silni oraz potęgowania są, jak wszystkie wcześniej zdefiniowane operacje, również operacjami indeksowanymi. Z każdą osią czasową skorelowana

jest odpowiednio indeksowana operacja silni oraz potęgowania. Operacje silni i potęgowania można indeksować funkcjami określonymi i wykonalnymi w zbiorze indeksów. Wówczas w definicjach znak mnożenia również jest indeksowany tą samą funkcją, która indeksuje definiowany operator silni lub potęgowania.

4. Wzmocnienia arytmetyki INA

Aksjomatykę INA można wzmocniać przez wprowadzenie do niej dodatkowych aksjomatów. Takie wzmocnienia można potraktować jako teorie sformułowane na gruncie INA. Przy czym możliwe są dwa rodzaje wzmocnień: (i) dotyczące liczebności indeksów (osi czasowych) oraz (ii) sposobów rozmieszczania przedmiotów (momentów) na osiach czasowych.

Najważniejszym wzmocnieniem pierwszego typu jest arytmetyka Peano PA. Wprowadzając do INA aksjomat ustalający to, że uniwersum osi czasowych (zbiór indeksów) jest jednoelementowe, uzyskuje się teorię równoważną arytmetyce PA.

$$(PA) (\forall i) i[x] = x$$

Zgodnie z aksjomatem (PA) każdy indeks jest funkcją tożsamościową. Skoro istnieje w danym uniwersum dokładnie jedna jednoargumentowa funkcja tożsamościowa, to uniwersa: osi czasowych oraz operatorów i -tego następnika, są jednoelementowe. Na gruncie INA + (PA) ważne są więc następujące twierdzenia: (T14) $(\forall i) (\forall j) i = j$; (T15) $(\forall i) (\forall j) S_i = S_j$. W świetle (T14) i (T15) indeksy we wszystkich wzorach są zbędne, gdyż nie spełniają żadnej funkcji różnicującej wyrażenia w formułach. Na mocy prostych przekształceń można wykazać, że aksjomaty INA są równoważne następującym twierdzeniom w INA + (PA):

$$(A1^*) (\exists x) x = 0$$

$$(A2^*) 0 = 0$$

$$(A3^*) x \neq 0 \wedge i \neq i \rightarrow x \neq x$$

$$(A4^*) x = y \rightarrow x = y$$

$$(A5^*) (\forall x) N(x)$$

$$(A6^*) (\forall x)(\exists y) S[x] = y$$

$$(A7^*) i \neq i \rightarrow S[x] = 0$$

$$(A8^*) (\forall x) S[x] \neq 0$$

$$(A9^*) (\forall x)(\forall y) (S[x] = S[y] \rightarrow x = y)$$

$$(A10^*) \Psi(0) \wedge (\forall x)[\Psi(x) \rightarrow \Psi(S[x])] \rightarrow (\forall x) \Psi(x)$$

(A1*), (A5*), (A6*), (A8), (A9) i (A10*) stanowią aksjomaty arytmetyki PA. Pozostałe twierdzenia są tautologiami logiki klasycznej. W podobny sposób wszystkie definicje: dodawania, mnożenia, silni, potęgowania oraz pozostałe,

przekształcają się w definicje odpowiednich działań w arytmetyce PA. Okazuje się więc, że arytmetyka INA stanowi uogólnienie arytmetyki PA.

Na uniwersum indeksów można narzucić strukturę arytmetyki Peano. Uczynić to można przez wprowadzenie trzech dodatkowych aksjomatów opisujących „zachowanie się” nieindeksowanej funkcji następnika Seq określonej na uniwersum indeksów. Przy czym należy wprowadzić aksjomat ustalający istnienie pierwszego, zerowego indeksu (wyróżnionej osi czasowej) i^* .

$$(I\ 1) \quad (\forall i)[i^* \neq \text{Seq}(i)]$$

$$(I\ 2) \quad (\forall i) (\forall j) [\text{Seq}(i) = \text{Seq}(j) \rightarrow i = j]$$

$$(I\ 3) \quad \Phi(i^*) \wedge (\forall i)[\Phi(i) \rightarrow \Phi(\text{Seq}(i))] \rightarrow (\forall i) \Phi(i)$$

Na gruncie wzmocnienia INA + (I1, I2, I3) istnieje nieskończenie wiele numerowanych osi czasowych. W związku z tym na indeksach (osiach czasowych) można dokonywać rozmaitych operacji arytmetycznych. Teorię INA + (I1, I2, I3) można zinterpretować jako rozszerzenie arytmetyki Peano. Warto zauważyć, że taka teoria pozostaje w sprzeczności z teorią INA + (PA). Ponadto na gruncie takiej teorii liczby naturalne Peano są funkcjami przyporządkowującymi obiektom indeksowane liczby naturalne.

W podobny sposób można rozszerzyć arytmetykę INA przez narzucenie na uniwersum indeksów struktury arytmetycznej liczb wymiernych lub liczb rzeczywistych. Przy takich rozszerzeniach indeksy (osie czasowe) posiadają swoje numery w postaci liczb wymiernych czy też liczb rzeczywistych. W takich teoriach można więc indeksować liczebniki INA liczbami wymiernymi lub rzeczywistymi. Takie indeksowanie umożliwia wyrażenie intuicji filozoficznej, iż istnieją przeszłe oraz przyszłe osie czasowe względem osi teraźniejszej (wyróżnionej) (że jest „wiele czasów przeszłych i czasów przyszłych”). Przy czym mogą być one „upakowane w politensalnej przestrzeni” gęsto i przeliczalnie (przy indeksowaniu liczbami wymiernymi) lub gęsto i nieprzeliczalnie (przy indeksowaniu liczbami rzeczywistymi).

Wzmocnieniem arytmetyki INA przez dookreślenie sposobu uporządkowania przedmiotów (momentów) na osiach czasowych jest teoria powstająca z INA przez dodanie aksjomatu ustalającego izomorfizm pomiędzy wszystkimi funkcjami i -tego następnika.

$$(Izm) \quad (\forall i) (\forall j) S_i \text{ izm } S_j$$

Wprowadźmy definicję funkcji podstawy liczebnika przyporządkowującą liczebnikowi przedmiot x taki, że dany liczebnik jest oznaczeniem liczby $i[x]$.

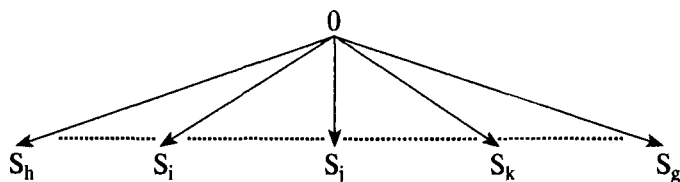
$$(Df\ \Delta) \quad (\forall \alpha_i) [\alpha_i \in L \rightarrow \Delta(\alpha_i) = x \equiv \alpha_i = i[x]]$$

Niech α_i, α_j stanowią liczebniki różniące się wyłączeniem indeksem. Wówczas zgodnie z aksjomatem (Izm) ważne jest następujące twierdzenie (T16): $(\forall \alpha_i) (\forall \alpha_j) \Delta(\alpha_i) = \Delta(\alpha_j)$. Podstawy wszystkich liczebników różniących się wyłącznie indeksem są identyczne. Na gruncie (INA) + (Izm) udowodnić można następujące twierdzenie. Niech $\otimes_k$ będzie dowolną, indeksowaną operacją arytmetyczną (dodawaniem, mnożeniem, odejmowaniem itd.). Niech $\alpha_i, \beta_j, \gamma_h, \delta_g$ będą liczebnikami. Udowodnić można schemat twierdzeń (T17) o postaci: $(\forall \alpha_i) (\forall \beta_j) (\forall \gamma_h) (\forall \delta_g) [\Delta(\alpha_i) = \Delta(\gamma_h) \wedge \Delta(\beta_j) = \Delta(\delta_g) \rightarrow \alpha_i \otimes_k \beta_j = \gamma_h \otimes_k \delta_g]$. Z punktu widzenia (T17) wyniki obliczeń na dowolnych osiach odpowiadających sobie liczebników są identyczne. Na przykład: $2_i +_k 6_j = 2_h +_k 6_g$. Oczywiście, przedstawiona równość daje się udowodnić wyłącznie na gruncie teorii (INA) + (Izm); w innych teoriach nie jest ważna.

Wyszczególnione przykłady wzmocnień arytmetyki (INA) służą egzemplifikacji tezy, iż prezentowana teoria może być rozwijana w rozmaitych kierunkach. W ramach takich wzmocnień można formalizować rozmaite modele struktur politensalnych.

III. Filozoficzny „model” arytmetyki INA

Należy postawić następujące pytanie: Jakiego typu struktury opisuje aksjomatyka INA? Zgodnie z aksjomatyką zbiór indeksów jest co najmniej jednoelementowy. Na mocy A1, istnieje przedmiot wyróżniony 0, któremu każda oś czasowa (indeks) przyporządkowuje liczebnik 0. Wszystkie osie czasowe posiadają więc dokładnie jeden element wspólny, którym jest liczba zero. Aksjomatyka (INA) nie rozstrzyga jednak kwestii dotyczącej tego, ile osi istnieje. Każda oś czasowa jest osią dyskretną i nieskończenie przeliczalną; jest równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych Peano. W aspekcie filozoficznym znaczy to, że każda oś jest liniowo uporządkowanym relacją następstwa ciągiem chwil, które są wypełniane momentami (przedmiotami). Takie „chwilo-momenty” są oznaczane przez stałe liczebniki. Ponadto przedstawiona aksjomatyka nie przesądza tego, w jakim porządku momenty są ułożone na dowolnej osi czasowej; zakłada się jedynie (zgodnie z (A5)) to, że każdy moment „leży” na każdej osi czasowej. Następujący diagram ilustruje opisywaną strukturę:



Strzałki ilustrują poszczególne osie czasowe; groty wskazują kierunek relacji następstwa skorelowanej z i-tą funkcją następnika. Na strzałkach zlokalizowane są momenty; każda strzałka reprezentuje nieskończenie przeliczalny i liniowo uporządkowany zbiór takich momentów ułożonych w chwilach. Indeksowane liczby naturalne stanowią więc konstrukcje utworzone z momentu i chwili. Przedstawioną na diagramie strukturę można opisać formalnie, posiłkując się językiem „standardowej matematyki”. Taki formalny model pokazuje jednak to, że choć indeksowane liczby naturalne mogą być rozumiane jako konstrukty z liczb naturalnych, to jednak uniwersum ich reprezentantów w „zwykłej matematyce” nie może być identycznościowo zredukowane do całej klasy konstruktów, otrzymanych na mocy pewnych określonych operacji teoriomnogościowych zastosowanych do liczb naturalnych. Indeksowane liczby naturalne stanowią jedynie podzbiór właściwy takiej klasy konstruktów.

1. Szkicowa konstrukcja modelu formalnego

Do konstrukcji indeksowanych liczb naturalnych są wymagane obiekty trzech typów: (i) osie czasowe (indeksy), (ii) pozycje na osiach czasowych (chwile) wraz z ich liniowym porządkiem; (iii) przedmioty (momenty) przyporządkowywane chwilom na osiach. Założyć można, że każda z tych kategorii stanowi zbiór nieskończenie przeliczalny, a więc obiekty każdej kategorii można ponumerować liczbami naturalnymi. Zgodnie z aksjomatem (A5) indeksowane liczby naturalne są wartościami funkcji-indeksów (osi czasowych) zastosowanych do przedmiotów. Takie funkcje przyporządkowują dowolnemu przedmiotowi jego pozycję na danej osi czasowej. Zatem indeksowane liczby naturalne można reprezentować jak uporządkowane trójki liczb naturalnych o postaci: $\langle \text{numer osi, numer pozycji na osi, numer przedmiotu} \rangle$.

Niech IN stanowi uniwersum indeksowanych liczb naturalnych. Wówczas przyjąć można następujący warunek teoriomodelowy (liczba zero stanowi reprezentację obiektu $i[0]$ dla dowolnego i ; stąd w poniższym warunku dodajemy element zero do uniwersum IN):

$$(W1) \quad IN \subset [N \times (N - \{0\})] \times (N - \{0\}) \cup \{0\}$$

Jednakże nie każda trójka liczb naturalnych stanowi reprezentację jakiejś indeksowanej liczby naturalnej. Zgodnie bowiem z aksjomatyką INA na danej osi czasowej na tej samej pozycji nie mogą leżeć dwa różne obiekty. Przyjąć więc należy następujący warunek:

$$(W2) \quad (\forall n, m, t, z)[n \in N \wedge m \in N \wedge t \in N \wedge z \in N \rightarrow (\langle n, m, t \rangle \in IN \wedge t \neq z \rightarrow \langle n, m, z \rangle \notin IN)]$$

Zgodnie z (W2), jeśli na przykład trójka $\langle 2, 2, 2 \rangle$ reprezentuje jakąś indeksowaną liczbę naturalną, to wówczas $\langle 2, 2, 4 \rangle$ nie reprezentuje żadnej indeksowanej liczby naturalnej. To, które trójki liczb naturalnych należą do IN, zależy od konwencji definiujących dany model. Na model INA składają się bowiem liniowo uporządkowane ciągi trójek liczb naturalnych następującego kształtu:

- (1) $0, \langle 0, 1, n_i \rangle, \langle 0, 2, n_j \rangle, \langle 0, 3, n_k \rangle, \dots, \text{itd.}$
- (2) $0, \langle 1, 1, m_i \rangle, \langle 1, 2, m_j \rangle, \langle 1, 3, m_k \rangle, \dots, \text{itd.}$

Dwie pierwsze liczby w dowolnej trójce nie są wyznaczone w sposób konwencyonalny; stanowią aprioryczny składnik reprezentantów indeksowanych liczb naturalnych. Natomiast to, jaki numer zostanie „wpisany” na trzecią pozycję w dowolnej trójce, zależy od konwencji definiujących strukturę modelową.

Pierwszy element trójki reprezentującej jakąś indeksowaną liczbę naturalną wyznacza i-tą relację następstwa korespondującą z danym ciągiem. Drugi zaś składnik trójki wyznacza pozycję trójki w danym ciągu. Jeśli działania arytmetyczne są przeprowadzane na trójkach w obrębie danego ciągu, to wówczas ich wynik jest wyznaczony przez drugi składnik obu trójek, na których jest wykonywane dane działanie. Na przykład: $\langle 0, 1, n_i \rangle +_0 \langle 0, 2, n_j \rangle = \langle 0, 3, n_k \rangle$. Jeśli działanie jest wykonywane na trójkach z różnych ciągów lub na ciągu różnym od ciągu, do którego należą dane trójki, to wówczas jego wynik jest zależny od trzecich składników tych trójek. Jeśli $n_j = m_k$ i $n_i = m_i$, to $\langle 0, 1, n_i \rangle +_1 \langle 0, 2, n_j \rangle = \langle 1, 1, m_i \rangle +_1 \langle 1, 3, m_k \rangle = \langle 1, 4, m_h \rangle$. Warto zauważyć, że redukcja dowolnej „wielociągowej” operacji na trójkach do „jednociągowej” operacji na trójkach jest wykonalna tylko wówczas, kiedy funkcja przeprowadzająca ciągi, do których należą trójki, w ciąg, na którym operacja jest wykonywana, jest obliczalna. Gdyby w podanym przykładzie nie było rozstrzygnięte to, czy $n_j = m_k$ dla dowolnego k , to wówczas obliczenie byłoby niewykonalne. Oczywiście, każda „jednociągowa”, indeksowana operacja na trójkach jest redukowalna do korespondującej nieindeksowanej operacji arytmetycznej stosowanej do drugich składników trójek. Mimo to nie można wyprowadzić wniosku, że indeksowane operacje arytmetyczne na trójkach są redukowalne do zwykłych operacji arytmetycznych (ich wykonanie bowiem zależy ostatecznie od istnienia określonych funkcji obliczalnych przeprowadzających ciągi w inne ciągi trójek). Na koniec należy dodać, że nie na każdej trójce liczb naturalnych indeksowane operacje można określać. Na przykład, nie można dodać do siebie trójek o postaci: $\langle 0, 1, n_i \rangle, \langle 0, 1, m_i \rangle$, o ile $n_i \neq m_i$, gdyż co najmniej jedna z trójek – zgodnie z (W2) – nie reprezentuje żadnej indeksowanej liczby naturalnej.

Przedstawiony szkic modelu arytmetyki INA skłania do postawienia następującego pytania: Czy arytmetyka INA stanowi teorię sformułowaną w ramach arytmetyki liczb naturalnych, wzbogaconej o teorię mnogości? Otóż na to pyta-

nie należy odpowiedzieć negatywnie. To, że istnieją modele arytmetyki INA sformułowane na gruncie zwykłej arytmetyki, nie oznacza tego, że arytmetyka INA jest jej rozszerzeniem. Analogicznie nie powiemy tego, że z faktu istnienia teoriomnogościowych modeli rachunku predykatów wynika to, że rachunek predykatów jest rozszerzeniem teorii zbiorów. Co więcej, w świetle warunków konstrukcyjnych modeli arytmetyki INA, dysponując arytmetyką liczb naturalnych nie można wykonać wszystkich obliczeń na gruncie INA. Aby takie obliczenia wykonać, należy dysponować funkcjami obliczalnymi przeprowadzającymi wzajemnie w siebie wszystkie ciągi modelu. Istnienie takich funkcji zależy od konwencji ustalających takie ciągi. Twierdzenia arytmetyki INA opisują dowolny model niezależnie od przyjętych konwencji ustalających poszczególne ciągi trójek danego modelu. Ale niektóre formuły obliczeniowe (zbudowane wyłącznie przy pomocy stałych liczebników oraz operatorów ze stałymi indeksowymi), sformułowane w języku INA, mogą być prawdziwe w pewnych modelach i fałszywe w innych. To kontrastuje z sytuacją w arytmetyce Peano. Jeśli dana formuła obliczeniowa PA jest prawdziwa w pewnym modelu standardowym, to jest prawdziwa we wszystkich modelach standardowych.

2. Modalny charakter arytmetyki INA

Modalny charakter arytmetyki INA przejawia się na dwa sposoby. Zgodnie z pierwszym sposobem konieczność formuły arytmetycznej jest definiowana jako prawdziwość w każdym modelu, podczas gdy możliwość – jako prawdziwość w co najmniej jednym modelu. Takie rozumienie modalności można określić jako metajęzykowe. Zgodnie z drugim sposobem, formuła obliczeniowa jest koniecznie prawdziwa na danej osi czasowej w danym modelu wtedy, gdy jej prawdziwość na danej osi (ciągu) w danym modelu wyznacza prawdziwość jej odpowiedników na dowolnej osi danego modelu osiągalnej z danej osi. Oba ujęcia modalności nie są równoważne. Drugi sposób rozumienia modalności można określić jako wewnątrzmodelowy.

Metajęzykowa modalność

Niech M będzie dowolnym, standardowym modelem arytmetyki INA. Niech δ będzie dowolną formułą zapisaną w języku arytmetyki INA. Wówczas definicja funktora $_m$ metajęzykowej konieczności przedstawia się następująco:

$$(Df. \Box_m) M_1 \models \Box_m(\delta) \equiv_{df} (\forall M) M \models \delta$$

Zgodnie z (Df. $\Box_m$) koniecznie prawdziwymi formułami arytmetyki INA są wyłącznie tautologie arytmetyczne (czyli formuły prawdziwe w każdym modelu standardowym arytmetyki INA). Wszystkie „wieloindeksowe” formuły

obliczeniowe nie posiadają statusu prawd koniecznych. Na przykład, formuła: $1_1 + {}_2 3_5 = 10_2$, jest prawdziwa w pewnym modelu, ale także jest fałszywa w innym modelu. Prawdziwość wyszczególnionej formuły w danym modelu jest zależna od konwencji ustalających dany model, a w szczególności od sposobu dystrybucji przedmiotów na osiach czasowych, ustalonego przez dane konwencje konstrukcyjne. W przeciwieństwie do podanego przykładu „jednoosiowe” formuły obliczeniowe, jeśli są prawdziwe w danym modelu, to są również prawdziwe w każdym modelu. Na przykład, formuła o postaci: $1_1 + {}_1 3_1 = 4_1$, jest prawdziwa w każdym modelu niezależnie od sposobu konstrukcji osi czasowych. Wszystkim prawdziwym formułom obliczeniowym arytmetyki Peano odpowiadają po parafrazie (w danej formule języka PA liczebniki i operatory są indeksowane tym samym indeksem) „jednościagowe” formuły arytmetyki INA, które są metajęzykowo koniecznie prawdziwe. Z punktu widzenia arytmetyki INA arytmetykę PA można interpretować jako „algorytm” wybierający z uniwersum formuł obliczeniowych języka arytmetyki INA wyłącznie formuły koniecznie prawdziwe.

Wewnątrzmodelowa modalność

Skoro konieczność wewnątrzmodelowa ma wyrażać ideę, zgodnie z którą obliczenia wykonane na danych liczebnikach na jednej osi w danym modelu dziedziczą się na obliczenia wykonane na korespondujących liczebnikach na wszystkich pozostałych osiach modelu osiągalnych z danej osi, to obliczenia cechujące się koniecznością w danym modelu będą wyrażały to, że w pewnych punktach wszystkie osie danego modelu osiągalne z danej osi posiadają tę samą własność arytmetyczną (albo inaczej: że ta sama własność arytmetyczna przysługuje wszystkim osiom czasowym danego modelu osiągalnym z danej osi).

Relacja osiągalności pomiędzy osiami czasowymi jest zdefiniowana następująco (gdzie *Obl* jest własnością obliczalności, zaś *f* reprezentuje funkcje określone na liczebnikach):

$$(Df. A) \text{ i } A \text{ j} \equiv_{df} (\forall x)(\exists f) (Obl(f) \wedge f[i[x]] = j[x])$$

Z osi czasowej *i* jest osiągalna oś czasowa *j* wtedy, gdy dla dowolnego przedmiotu (momentu) *x* istnieją takie funkcje *f*, że *f* są funkcjami obliczalnymi oraz wartością zastosowania funkcji *f* do liczby *i[x]* na osi *i* jest liczba *j[x]* na osi *j*. Innymi słowy, jeśli z osi *i* jest osiągalna oś *j*, to dla każdej indeksowanej liczby na osi *i* istnieje procedura obliczania liczebnika o tej samej podstawie przedmiotowej (jaką posiada liczba *i[x]*) na osi *j*. Zgodnie z definicją osiągalności pomiędzy osiami każda oś czasowa w danym modelu jest osiągalna z samej siebie. Ponadto, łatwo zauważyć, że relacja osiągalności jest przechodnia. Jeśli bowiem pewna funkcja obliczalna *f* przeprowadza daną liczbę na osi *i* na liczbę

na osi j oraz pewna funkcja obliczalna g przeprowadza daną liczbę na osi j na pewną liczbę na osi k , to wówczas istnieje superpozycja funkcji f z funkcją g , która przeprowadza daną liczbę z osi i na odpowiednią liczbę na osi k . Taka superpozycja funkcji f z funkcją g jest funkcją obliczalną. Zatem zgodnie z (Df. A) ważne są następujące twierdzenia:

(T18) $(\forall i) i A i$

(T19) $(\forall i) (\forall j) (\forall k)[i A j \wedge j A k \rightarrow i A k]$

Oczywiście, modele mogą być konstruowane na różne sposoby. Możliwe są takie modele, że pomiędzy różnymi osiami nie zachodzi relacja osiągalności. Odwrotna sytuacja, w której wszystkie osie danego modelu pozostają względem siebie w relacji osiągalności, jest także możliwa.

Każdą prawdziwą, elementarną formułę obliczeniową arytmetyki INA można schematycznie przedstawić w następujący sposób: $\alpha_i \otimes_k \beta_j = \gamma_k$, gdzie $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ są liczebnikami, zaś $\otimes_k$ jest dowolnym, indeksowanym operatorem. Przy czym podstawy w liczebnikach: α, β, γ , oznaczają krotność funkcji, odpowiednio, i -tego, j -tego oraz k -tego następnika, zastosowanych do 0 . Stąd, na przykład, $2_i = S_i S_i[i[0]]$. Niech $\delta(i, j, k)$ oznacza elementarną formułę obliczeniową podpadającą pod schemat: $\alpha_i \otimes_k \beta_j = \gamma_k$. Wówczas podstawienie $\delta(i, j, k/h)$ oznacza elementarną formułę obliczeniową kształtu: $\alpha_i \otimes_h \beta_j = \gamma_h$. Formuła $\delta(i, j, k/h)$ różni się od formuły $\delta(i, j, k)$ tym, że w dwóch miejscach (miejsce indeksu operatora i i miejsce indeksu wartości operacji), w których występuje indeks k w formule $\delta(i, j, k)$, w formule $\delta(i, j, k/h)$ występuje indeks h . Definicja konieczności wewnątrzmodelowej przedstawia się następująco:

$$(Df. \Box) \Box \delta(i, j, k) \equiv_{df} (\forall h)[k A h \rightarrow \delta(i, j, k/h)]$$

Założmy, że formuła $1_1 +_2 3_5 = 10_2$ jest prawdziwa w modelu M . Zatem zgodnie z (Df. $\Box$) obliczeniowa formuła modalna: $\Box(1_1 +_2 3_5 = 10_2)$, jest prawdziwa w modelu M wtedy, gdy formuła $(\forall h)[2 A h \rightarrow (1_1 +_h 3_5 = 10_h)]$ jest prawdziwa w M . Jeśli model M jest przykładowo skonstruowany z trzech osi, numerowanych cyframi: $1, 2, 3$, oraz pomiędzy osiami zachodzi relacja osiągalności w następujący sposób: $2 A 1, 2 A 3$, to prawdziwość w modelu M formuły: $\Box(1_1 +_2 3_5 = 10_2)$, jest równoważna prawdziwości koniunkcji trzech następujących formuł: $(1_1 +_2 3_5 = 10_2) \wedge (1_1 +_1 3_5 = 10_1) \wedge (1_1 +_3 3_5 = 10_3)$. Łatwo zauważyć, że w rozszerzeniu Peano arytmetyki INA, a więc w modelach jednoosiowych, wszystkie prawdziwe formuły obliczeniowe są konieczne prawdziwe. Podobna sytuacja zachodzi w modelach, w których wszystkie osie czasowe są izomorficzne z uwagi na liniowe uporządkowanie (dystrybucja momentów na osiach pod względem liniowego porządku jest identyczna na każdej osi). Konieczność

wewnątrzmodelowa wyraża więc zasadę sztywnej desygnacji dla liczebników we wszystkich osiach osiągalnych z danej osi. Oznacza to, że w pewnych chwilowo-momentach osie czasowe nie różnią się. Jeśli trójki liczb naturalnych o postaci: $\langle 1, 2, 3 \rangle$, $\langle 2, 2, 3 \rangle$, ..., $\langle n, 2, 3 \rangle$, są indeksowanymi liczbami naturalnymi oraz relacja osiągalności zachodzi pomiędzy osiami: $1, 2, 3, \dots, n$ tak, że $1 A 2, 2 A 3, \dots, n-1 A n$, to wówczas trójki o postaci: $\langle 1, 2, 3 \rangle$, $\langle 2, 2, 3 \rangle$, ..., $\langle n, 2, 3 \rangle$, wyznaczają punkty konieczności na każdej osi czasowej. Jeśli dla przykładu istnieje w danym modelu drugi ciąg punktów konieczności: $\langle 1, 4, 5 \rangle$, $\langle 2, 4, 5 \rangle$, ..., $\langle n, 4, 5 \rangle$, to w takim modelu zachodzi: $\Box(2_i \otimes_k 4_h = \alpha_k)$. Dla operatorów arytmetycznych jednoargumentowych konieczna prawdziwość formuł obliczeniowych w danym modelu wymaga istnienia co najmniej jednego ciągu punktów konieczności. Dla operatorów dwuargumentowych wymagane jest istnienie co najmniej dwóch takich ciągów w danym modelu. Możliwe do skonstruowania są modele, w których nie istnieją żadne ciągi punktów konieczności.

Formuła, która jest koniecznie prawdziwa metajęzykowo, nie musi być koniecznie prawdziwa wewnątrzmodelowo. Formuła obliczeniowa: $2_i +_i 2_i = 4_i$, jest koniecznie prawdziwa metajęzykowo. Nie mniej jednak w modelach wieloosiowych takich, że: $i A k$ oraz $\langle i, 2, n \rangle$, $\langle k, 2, m \rangle \in \text{IN}$, gdzie $n \neq m$, $2_i +_k 2_i$, nie musi być identyczne z 4_k . Otóż, konieczna prawdziwość metajęzykowa wyraża własności wspólne wszystkim modelom arytmetyki INA, podczas gdy konieczna prawdziwość wewnątrzmodelowa wyraża własności wspólne wszystkim osiom czasowym danego modelu, konstruowanym na podstawie pewnej osi wyróżnionej.

To, czy pojęcie modalności na gruncie arytmetyki INA posiada jakąś wartość aplikacyjną, zależy od tego, czy struktury politensalne, służące do konceptualizacji jakichś zjawisk, charakteryzują się własnościami formalnymi wspólnymi dla wszystkich osi czasowych danej struktury. Arytmetyka INA dopuszcza konstrukcje modalne i w związku z tym może stanowić narzędzie formalnego modelowania odpowiednich modalnych struktur politensalnych. Warto dodać, że w przeciwieństwie do teoriomodelowego rozumienia relacji osiągalności w logice modalnej, w arytmetyce INA relację osiągalności da się wyrazić w języku przedmiotowym. W językach modalnych, konstruowanych standardowo, nie wprowadza się funktora wyrażającego osiągalność międzyświatową. Natomiast w języku arytmetyki INA funktor osiągalności pomiędzy osiami czasowymi jest definiowalny (i jest to funktor zdaniotwórczy od wyrażeń indeksowych, czyli funkcyjnych).

IV. Konstrukcje indeksowanych liczb: całkowitych i wymiernych

Indeksowane liczby naturalne mogą posłużyć za podstawę konstrukcji kategorii indeksowanych liczb: całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Co więcej, okazuje się, że istnieje wiele subkategorii tego typu liczb.

1. Indeksowane osiami czasowymi liczby całkowite i półcałkowite

Uniwersum indeksowanych liczb całkowitych można skonstruować w standardowy sposób jako sumę rodzin klas abstrakcji wyznaczonych przez indeksowane relacje równoważnościowe określone na parach indeksowanych liczb naturalnych w następujący sposób:

$$(Df. T_n) \langle i[x], j[y] \rangle T_n \langle k[z], m[u] \rangle \equiv (i[x] +_n m[u] = i[y] +_n k[z])$$

Definicję $(Df. T_n)$ można przekształcić na mocy $(Df. +_n)$ na następującą postać:

$$(Df. T_n)^* \langle i[x], j[y] \rangle T_n \langle k[z], m[u] \rangle \equiv (n[x] +_n n[u] = n[y] +_n n[z])$$

Relacja T_n generuje więc w iloczynie kartezjańskim indeksowanych liczb naturalnych $N \times N$ klasy abstrakcji. Każdą taką klasę abstrakcji można określić jako n -indeksowaną liczbę całkowitą. Co więcej, jest tyle indeksów liczb całkowitych, ile jest różnych relacji o postaci T_n (dla każdego indeksu n). Zbiór liczb całkowitych o tym samym n -tym indeksie można zdefiniować jako zbiór ilorazowy zbioru $N \times N$ względem relacji T_n :

$$(Df. C_n) C_n = N \times N / T_n$$

W innym sformułowaniu powiemy, że λ należy do zbioru liczb całkowitych o n -tym indeksie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka para indeksowanych liczb naturalnych, generująca klasę abstrakcji z uwagi na relację T_n , z którą identyczna jest liczba całkowita λ . Zbiór indeksowanych liczb całkowitych C jest więc identyczny z sumą rodziny zbiorów C_n dla dowolnego n . Łatwo jest wykazać, że liczebność rodziny zbiorów C_n jest co najwyżej równa liczebności zbioru osi czasowych skorelowanych z wyjściowym zbiorem indeksowanych liczb naturalnych.

To, jak „pracuje” zaprezentowana konstrukcja, można zezemplifikować następującym przykładem: Niech będą dane trzy osie czasowe: **0**, **1**, **2**. Niech x , y , z będą przedmiotami. Niech wyszczególnione osie posiadają następujące początkowe porządki sekwencjalne: $\langle 0, x_0, y_0, z_0, \dots \rangle$, $\langle 0, z_1, y_1, x_1, \dots \rangle$, $\langle 0, y_2, z_2, x_2, \dots \rangle$. Wyróżniamy więc trzy relacje równoważnościowe: T_0 , T_1 , T_2 . Łatwo

można pokazać, że liczby całkowite: $1_0, 1_1, 1_2$, są różnymi liczbami. Przyjmijmy, iż 1_0 jest klasą abstrakcji wyznaczoną przez parę $\langle x_0, 0 \rangle$ oraz relację T_0 . Do liczby całkowitej 1_0 rozumianej jako klasa abstrakcji par indeksowanych liczb naturalnych, między innymi, należą następujące obiekty (choć nie są to wszystkie): $\langle x_0, 0 \rangle$, $\langle y_0, x_0 \rangle$, $\langle z_0, y_0 \rangle$, $\langle x_1, 0 \rangle$, $\langle y_1, x_1 \rangle$, $\langle z_1, y_1 \rangle$. Z kolei do liczby całkowitej 1_1 nie należą takie pary, jak: $\langle x_1, 0 \rangle$ (ta para należy do 3_1), $\langle y_1, x_1 \rangle$, $\langle z_1, y_1 \rangle$. Stąd oczywistym jest: $1_0 \neq 1_1$. Podobnie można wykazać: $-2_2 \neq -2_1$. Do -2_2 nie należy $\langle 0, y_0 \rangle$ (ta para należy do -1_2 oraz do -2_1).

Warto zwrócić uwagę na następujące cechy charakterystyczne uniwersum indeksowanych liczb całkowitych: (i) dla dowolnych indeksów i, k , $0_i = 0_k$, czyli istnieje dokładnie jedna liczba całkowita 0; (ii) jeśli dwie osie czasowe indeksowanych liczb naturalnych są izomorficzne z uwagi na swoje relacje następnika, to obie osie generują ten sam zbiór indeksowanych liczb całkowitych; (iii) jeśli zachodzi wzmocnienie (PA), to dla dowolnych indeksów i, k , zachodzi: $\alpha_i = \alpha_k$, gdzie α_i, α_k są liczebnikami (innymi słowy: istnieje dokładnie jedna jedynka, dokładnie jedna dwójka itd., w zbiorze liczb całkowitych ufundowanych na uniwersum indeksowanych liczb naturalnych wyznaczonych przez aksjomatykę $INA + (PA)$); (iv) dla danej relacji T_n każda para indeksowanych liczb naturalnych należy do jednej liczby całkowitej wyznaczonej przez tę relację; jeśli dana przestrzeń indeksowanych liczb naturalnych wyznacza n kategorii liczb całkowitych C_n , to dowolna para indeksowanych liczb naturalnych należy do dokładnie jednej liczby całkowitej w każdej kategorii C_n .

Na uniwersum indeksowanych liczb całkowitych można narzucić operacje k -tego dodawania liczb całkowitych oraz k -tego ich mnożenia. Co więcej, operacje te można uogólnić do operacji dodawania i mnożenia z uwagi na określone funkcje (analogicznie jak w wypadku indeksowanych liczb naturalnych). Najpierw należy wprowadzić odpowiednie operacje na parach indeksowanych liczb naturalnych. Następnie należy zdefiniować n -dodawanie oraz n -mnożenie jako klasy abstrakcji od wcześniej zdefiniowanych operacji na parach indeksowanych liczb naturalnych.

$$(Df \ \diamond_n) \ \langle i[x], j[y] \rangle \ \diamond_n \ \langle k[z], m[u] \rangle = \langle i[x] +_n k[z], j[y] +_n m[u] \rangle$$

$$(Df \ + (T_n)) \ [\langle i[x], j[y] \rangle] T_n + (T_n) \ [\langle k[z], m[u] \rangle] T_n = [\langle i[x], j[y] \rangle \ \diamond_n \ \langle k[z], m[u] \rangle] T_n, \text{ gdzie } [\langle i[x], j[y] \rangle] T_n, [\langle i[x], j[y] \rangle] T_n \text{ s\u0105 klasami abstrakcji danych par upor\u0105dkowanych z uwagi na relacj\u0119 } T_n.$$

W wypadku wzmocnienia $INA + (PA)$, dla dowolnych n, k , operacje: $+ (T_n)$, $+ (T_k)$, s\u0105 identyczne. W podobny spos\u00f3b wprowadza si\u0119 definicj\u0119 mno\u017cenia indeksowanych liczb całkowitych.

Zdefiniowa\u0107 mo\u017cna kategori\u0119 liczb p\u00f3lc\u0105kwitych. Ot\u00f3\u017c, takie liczby p\u00f3lc\u0105kwite b\u0119d\u0105 klasami abstrakcji od par indeksowanych liczb naturalnych z uwagi na

pewną relację równoważnościową określoną jedynie na pojedynczej osi. Definicja tejże relacji przedstawia się następująco:

$$(Df. B_n) \langle i[x], j[y] \rangle B_n \langle k[z], m[u] \rangle \equiv [i = n \wedge j = n \wedge k = n \wedge m = n \wedge (i[x] +_n m[u] = i[y] +_n k[z])]$$

Zgodnie z (Df. B_n) jedynie pary indeksowanych liczb naturalnych z jednej i tej samej osi mogą pozostawać względem siebie w relacji B_n . Relacja B_n generuje więc w iloczynie kartezjańskim $N \times N$ klasy abstrakcji. Każdą taką klasę abstrakcji można określić jako n -indeksowaną liczbę półcałkowitą. Co więcej, jest tyle indeksów liczb półcałkowitych, ile jest różnych relacji o postaci B_n . Zbiór liczb półcałkowitych o tym samym n -tym indeksie można zdefiniować jako zbiór ilorazowy zbioru $N \times N$ względem relacji B_n :

$$(Df. semiC_n) semiC_n = N \times N / B_n$$

Zbiór $semiC$ będzie więc definiowany jako suma rodziny zbiorów $semiC_n$.

2. Indeksowane liczby wymierne i półwymierne

Indeksowane liczby wymierne dają się skonstruować z indeksowanych liczb całkowitych za pomocą operacji n -mnożenia. W odróżnieniu od indeksowanych liczb naturalnych, liczby całkowite oraz półcałkowite będą indeksowane indeksami dolnymi. Taki indeks oznacza oś czasową liczb naturalnych, na bazie której dana liczba całkowita lub półcałkowita jest skonstruowana. Tak, jak w wypadku indeksowanych liczb całkowitych, uniwersum indeksowanych liczb wymiernych rozpada się na podklasy wyznaczone przez szczególnego rodzaju relacje równoważnościowe skorelowane z określonymi operacjami n -mnożenia. Zdefiniujmy więc relację równoważnościową M_n :

$$(Df. M_n) (\forall x_i, y_j, z_k, u_m) \{x_i \in C \wedge y_j \in C \wedge z_k \in C \wedge u_m \in C \wedge y_j \neq 0 \wedge u_m \neq 0 \rightarrow [\langle x_i, y_j \rangle M_n \langle z_k, u_m \rangle \equiv (x_i \cdot_n u_m = y_i \cdot_n z_k)]\}$$

Definicja (Df. W_n) jest równoważna formule kształtu:

$$(Df. M_n)^* (\forall x_i, y_j, z_k, u_m) \{x_i \in C \wedge y_j \in C \wedge z_k \in C \wedge u_m \in C \wedge y_j \neq 0 \wedge u_m \neq 0 \rightarrow [\langle x_i, y_j \rangle M_n \langle z_k, u_m \rangle \equiv (x_n \cdot_n u_n = y_n \cdot_n z_n)]\}$$

Relacja M_n generuje w iloczynie kartezjańskim: $C \times (C - \{0\})$ pewien zbiór klas abstrakcji. Każda taka klasa abstrakcji, wyznaczona, przez M_n , jest jakąś liczbą wymierną o n -tym indeksie. Zbiór liczb wymiernych o tym samym n -tym

indeksie można zdefiniować jako zbiór ilorazowy zbioru $C \times (C - \{0\})$ względem relacji M_n :

$$(\text{Df. } W_n) \quad W_n = C \times (C - \{0\}) / M_n$$

Zbiór wszystkich indeksowanych liczb wymiernych W jest więc sumą rodziny zbiorów W_n . Wyróżnić można następujące charakterystyczne cechy tego zbioru: (i) istnieje dokładnie jedna liczba wymierna 0 ; (ii) rodzina zbiorów W_n nie jest liczniejsza od rodziny zbiorów C_n (innymi słowy: zbiór indeksów liczb wymiernych nie jest liczniejszy od zbioru indeksów liczb całkowitych, nad którym liczby wymierne są skonstruowane); (iii) jeśli $C = C_0 \rightarrow W = W_0$; w tej sytuacji zbiór indeksowanych liczb wymiernych „redukuje się” do standardowego zbioru liczb wymiernych.

Skonstruować można trzy kategorie liczb półwymiernych: na bazie liczb półcałkowitych oraz na bazie liczb całkowitych. Pierwszą kategorię $W_{\text{semi}C}^*$ konstituują liczby półwymierne ufundowane „jednoosiowo” na liczbach półcałkowitych. Drugą kategorię $W_{\text{semi}C}$ stanowią liczby półwymierne ufundowane „wieloosiowo” na liczbach półcałkowitych. Trzecią kategorię W_C^* konstituują liczby półwymierne ufundowane „jednoosiowo” na liczbach całkowitych. Konstrukcje wymienionych kategorii przedstawiają się następująco:

Konstruujemy następującą klasę relacji równoważnościowych:

$$(\text{Df. } M_{\text{semi}C, n}^*) \quad (\forall x_i, y_j, z_k, u_m) \{x_i \in \text{semi}C \wedge y_j \in \text{semi}C \wedge z_k \in \text{semi}C \wedge u_m \in \text{semi}C \wedge y_j \neq 0 \wedge u_m \neq 0 \rightarrow [\langle x_i, y_j \rangle M_{\text{semi}C, n}^* \langle z_k, u_m \rangle \equiv [i = n \wedge j = n \wedge k = n \wedge m = n \wedge (x_i \cdot_n u_m = y_i \cdot_n z_k)]] \}$$

Relacja $M_{\text{semi}C, n}^*$ wyznacza więc wyłącznie na n -tej osi liczb półcałkowitych określone klasy abstrakcji par liczb półcałkowitych. Każdą taką klasę abstrakcji można skonceptualizować jako liczbę półwymierną należącą do zbioru $W_{\text{semi}C, n}^*$.

$$(\text{Df. } W_{\text{semi}C, n}^*) \quad W_{\text{semi}C, n}^* = \text{semi}C \times \text{semi}C - \{0\} / M_{\text{semi}C, n}^*$$

Zbiór $W_{\text{semi}C, n}^*$ jest więc zbiorem ilorazowym $\text{semi}C \times \text{semi}C - \{0\} / M_{\text{semi}C, n}^*$ względem relacji $M_{\text{semi}C, n}^*$. Suma rodziny zbiorów $W_{\text{semi}C, n}^*$ jest identyczna ze zbiorem $W_{\text{semi}C}^*$. Pary liczb półcałkowitych należące do zdefiniowanego rodzaju liczb półwymiernych posiadają następujące charakterystyczne własności: (i) liczby półcałkowite należące do takich par mają ten sam indeks; (ii) w strukturze z jedną osią czasową liczb półcałkowitych każda liczba półwymierna należąca do $W_{\text{semi}C}^*$ jest również liczbą wymierną; (iii) dla przestrzeni z nieskończoną ilością osi czasowych liczb półcałkowitych zachodzi następująca zależność: ponieważ

każda liczba półcałkowita zawiera się w korespondującej liczbie całkowitej, a te ostatnie tworzą pary uporządkowane konstytuujące liczby wymierne, to można relację zachodzącą pomiędzy liczbami półwymiernymi kategorii W^*_{semiC} a liczbami wymiernymi określić jako zanurzenie (składniki elementów – uporządkowanych par – liczb półwymiernych kategorii W^*_{semiC} zawierają się w korespondujących składnikach – uporządkowanych parach – elementach liczb wymiernych).

Skonstruujmy następną relację równoważnościową, której klasy abstrakcji są identyczne z liczbami półwymiernymi kategorii W_{semiC} .

$$(Df. M_{semiC, n}) (\forall x_i, y_j, z_k, u_m) \{x_i \in semiC \wedge y_j \in semiC \wedge z_k \in semiC \wedge u_m \in semiC \wedge y_j \neq 0 \wedge u_m \neq 0 \rightarrow [\langle x_i, y_j \rangle M_{semiC, n} \langle z_k, u_m \rangle \equiv x_i \cdot_n u_m = y_j \cdot_n z_k] \}$$

Różnica pomiędzy relacjami: $M^*_{semiC, n}$ oraz $M_{semiC, n}$, sprowadza się do tego, że pary pozostające względem siebie w relacji $M^*_{semiC, n}$ „istnieją” na tej samej osi czasowej, podczas gdy pary pozostające względem siebie w relacji $M_{semiC, n}$ mogą „istnieć” na różnych osiach czasowych. Oczywistym jest twierdzenie, zgodnie z którym: $M^*_{semiC, n} \subset M_{semiC, n}$. W wypadku przestrzeni o jednej osi czasowej obie relacje są identyczne. Każdą klasę abstrakcji względem relacji $M_{semiC, n}$ dla danego n można określić jako wielosiowo skonstruowaną liczbę półwymierną:

$$(Df. W_{semiC, n}) W_{semiC, n} = semiC \times semiC - \{0\} / M_{semiC, n}$$

Suma rodziny zbiorów $W_{semiC, n}$ jest identyczna ze zbiorem W_{semiC} . Porównując liczby półwymierne należące do kategorii: W^*_{semiC} , W_{semiC} , można metaforycznie stwierdzić, że liczby półwymierne ze zbioru W_{semiC} są „silniej wymierne” niż liczby ze zbioru W^*_{semiC} . Okazuje się bowiem, że każda liczba półwymierna kategorii W^*_{semiC} jest zawarta w korespondującej liczbie półwymierniej kategorii W_{semiC} . Warto zaznaczyć, że liczby półwymierne kategorii W_{semiC} nie są zawarte w korespondujących liczbach wymiernych; w tym wypadku zachodzi również relacja zanurzenia (choć to zanurzenie liczb półwymiernych kategorii W_{semiC} w korespondujących liczbach wymiernych jest „silniejsze” niż zanurzenie liczb półwymiernych kategorii W^*_{semiC} w odpowiadających im liczbach wymiernych).

Skonstruujmy następną relację równoważnościową, której klasy abstrakcji są identyczne z liczbami półwymiernymi kategorii W^*_C .

$$(Df. M^*_C, n) (\forall x_i, y_j, z_k, u_m) \{x_i \in C \wedge y_j \in C \wedge z_k \in C \wedge u_m \in C \wedge y_j \neq 0 \wedge u_m \neq 0 \rightarrow [\langle x_i, y_j \rangle M^*_C, n \langle z_k, u_m \rangle \equiv [i = n \wedge j = n \wedge k = n \wedge m = n \wedge (x_i \cdot_n u_m = y_j \cdot_n z_k)]] \}$$

Klasy abstrakcji relacji $M^*_{C,n}$ są złożone z par liczb całkowitych należących wyłącznie do jednej osi. Zbiór liczb półwymiernych kategorii $W^*_{C,n}$ definiujemy następująco:

$$(Df. W^*_{C,n}) W^*_{C,n} = C \times C - \{0\} / M^*_{C,n}$$

Suma rodziny zbiorów $W^*_{C,n}$ jest identyczna ze zbiorem liczb półwymiernych W^*_C . Jeśli przestrzeń osi czasowych liczb całkowitych jest jednoelementowa, to zbiór W^*_C jest identyczny ze zbiorem W . Łatwo można wykazać, że każda liczba półwymierna kategorii W^*_C jest zawarta w korespondującej liczbie wymiernej.

Na liczbach półwymiernych oraz wymiernych można określić takie działania, jak: dodawanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie itd. Co więcej, z liczb wymiernych oraz półwymiernych można tworzyć ciągi (między innymi ciągi spełniające warunek Cauchy'ego). To zaś umożliwia skonstruowanie indeksowanych liczb rzeczywistych metodą Cantora. Liczby rzeczywiste tak konstruowane można nadbudowywać nad czterema kategoriami liczb wymiernych: trzema kategoriami liczb półwymiernych oraz kategorią indeksowanych liczb wymiernych. Przy czym takie ciągi Cantorowskie, spełniające warunek Cauchy'ego, mogą być konstruowane jednoosiowo lub wieloosiowo. W świetle naszkicowanego projektu konstrukcyjnego uniwersum indeksowanych liczb rzeczywistych jawi się jako kategoria niejednorodna, posiadająca swoje subkategorie w postaci różnych typów liczb półrzeczywistych.

Zakończenie

Jeśli liczby rzeczywiste tworzą różne osie czasowe, a więc i one są indeksowane osiami czasowymi, to wówczas można konstruować z takich zbiorów liczb rzeczywistych płaszczyzny. Klasyczne płaszczyzny można by określić jako produkty kartezjańskie zbiorów $R_n \times R_n$. Natomiast nieklasyczne płaszczyzny byłyby produktami kartezjańskimi o postaci (gdzie $n \neq m$): $R_n \times R_m$. Takie nieklasyczne konstrukcje płaszczyzn, polegające na tym, że ich osie konstytuują różne osie czasowe (możliwe światy), można by określić jako płaszczyzny modalne (interswiatowe), o ile pomiędzy indeksami jest określona relacja osiągalności. Funkcja odległości między dowolnymi punktami takiej przestrzeni nie mogłaby być reprezentowana jako długość przeciwprostokątnej odpowiedniego trójkąta prostokątnego. W takim wypadku odległość pomiędzy osiami czasowymi (możliwymi światami) również musiałaby współdeterminować odległość pomiędzy dwoma punktami dowolnej modalnej płaszczyzny. Co więcej, z punktu widzenia jednej osi (obserwatora) odległość pomiędzy danymi punktami modalnej płaszczyzny mogłaby się różnić od odległości pomiędzy tymi samymi punktami z punktu widzenia drugiej osi takiej płaszczyzny (wyniki tych samych operacji

na liczebnikach na różnych osiach mogą się różnić). Wyszczególnione problemy wymagają rozstrzygnięcia podstawowej kwestii: w jaki sposób skonstruować funkcję odległości pomiędzy osiami czasowymi (możliwymi światami)? Problem ten komplikuje się przy założeniu, że liczba osi czasowych jest nieprzeliczalna, a więc wówczas, kiedy liczby rzeczywiste są indeksowane innymi liczbami rzeczywistymi. W każdym razie przedstawiona konstrukcja arytmetyczna może stanowić podstawę dla konstrukcji „dzikiej, modalnej” geometrii.

Czy zaprezentowana szkicowo konstrukcja arytmetyki indeksowanych liczb mogłaby posiadać jakieś aplikacje w przyrodoznawstwie, w obszarze nomologicznego modelowania jakichś zjawisk fizycznych? Na to pytanie nie jest łatwo odpowiedzieć, gdyż nie wiadomo, jakiego typu obiekty geometryczne generuje uniwersum indeksowanych liczb rzeczywistych. Jaki status geometryczny miałyby interświatowe okręgi, trójkąty czy nawet odcinki?

On Modal Arithmetic of Indexed Natural Numbers: Possible Worlds Made of Numbers

Key Words: indexed natural numbers, arithmetic modalization of arithmetic, generalization of arithmetic, semi-whole numbers, semi-rational numbers, semi-real numbers

The purpose of the article is to construct an arithmetic of indexed natural numbers which would be a generalized version of Peano's arithmetic. It is assumed within that theory that there may be several numbers one, several numbers two, several numbers three, etc. Moreover several different operations of addition and multiplication can be defined for these numbers. Such formalism makes it possible to construct new kinds of numbers; semi-whole numbers, semi-rational numbers and semi-real numbers. The construction is inspired by Kant's philosophy.