

Piotr Lipski, Tomasz Placek*, Jacek Wawer

Realne możliwości a modalna demokracja

Słowa kluczowe: modalność, realna możliwość, demokratyczna możliwość, rozgałęziający czas, rozgałęziająca czasoprzestrzeń

I. Wstęp

Przypuśćmy, że świat jest tu i ówdzie indeterministyczny. Tu i teraz mogę podnieść filiżankę kawy, ale mogę też jej nie podnieść. W laboratorium na Reymonta lecący elektron może odchylić się w prawo w polu magnetycznym, ale może odchylić się w lewo. W wielu jednak innych obszarach świata rzeczy toczą się twardym biegiem: bezpośrednia przyszłość zdarzeń zawiera dokładnie jedną możliwość. Piłka toczy się po murawie ku bramce i nie ma możliwości, żeby wpadła w inne miejsce niż to właśnie. Być może ta wizja jest fałszywa. Być może każde zdarzenie ma dokładnie jedną możliwą przyszłą kontynuację, co znaczy, że króluje powszechny determinizm. Być może, odwrotnie, tam gdzie nasz wzrok widzi twardą konieczność, stoją otwarte możliwości. W skrajnym wypadku, być może każde zdarzenie ma więcej niż jedną możliwą przyszłą kontynuację. Nie potrafimy wykluczyć tych skrajnych opcji. Założmy jednak, na użytek tej pracy, indeterminizm lokalny, czyli założmy, że świat jest jedynie tu i ówdzie indeterministyczny.

Wśród wielu niejasności związanych z pojęciami determinizmu i indeterminizmu jest jedno, które dotyka właśnie takiego lokalnego pojęcia determinizmu. Z jednej strony, obecność zdarzeń indeterministycznych prowadzi do wyróżnienia pewnych obszarów świata, tych, w których zachodzą indeterministyczne zdarzenia. Z drugiej strony, nasze modalne intuicje są często demokratyczne. Na przy-

* Badania T. Placeka były wykonane w ramach projektu badawczego MNiSW nr 3165/32. Adres autorów: Instytut Filozofii UJ, ul. Grodzka 52, 31-044 Kraków; email PL: pilipski@gmail.com, JW: jacek.wawer@uj.edu.pl i TP: Tomasz.Placek@uj.edu.pl.

kład mówimy, że coś mogło się zdarzyć wcześniej (później) albo coś mogliśmy zrobić wcześniej (później), chociaż realnie takich możliwości nie było. Bardziej niż makroskopowych zjawisk demokracja ta zdaje się dotyczyć elementarnych obiektów fizycznych. Aby zilustrować – choć dwa protony zderzyły się w danym miejscu i czasie, fizycy skłonni są twierdzić, że mogły się zderzyć w dowolnym (choć być może ograniczonym do jakiegoś obszaru) miejscu i czasie. Przekonanie to opiera się na wymogu, aby prawa przyrody nie wyróżniały jakichś momentów czasu i miejsc przestrzeni. Ale tu właśnie tkwi zarzewie konfliktu: jak bowiem zagwarantować, że prawa nie wyróżniają jakichś momentów czasu i miejsc przestrzennych, skoro (przy założeniu lokalnego indeterminizmu) pewne momenty i miejsca są wyróżnione, bo zachodzą w nich indeterministyczne zdarzenia?¹ Warto może tu jeszcze wspomnieć, że istnieje silny związek, poprzez twierdzenia E. Noether, między tym, że teoria nie wyróżnia momentów/czasów (bardziej ogólnie: zachowuje symetrie), a tym, że spełnione są w niej zasady zachowania, takie jak zasada zachowania energii, pędu czy krętu².

Aby ustalić terminologię, w dalszym ciągu będziemy mówili o konflikcie między modalną demokracją a realnymi możliwościami. Z punktu widzenia modalnej demokracji, nasz kolega Michał mógłby być prezydentem Polski: podczas ostatnich wyborów prezydenckich miał powyżej trzydziestu pięciu lat, a więc przysługiwało mu bierne prawo wyborcze. Z drugiej strony, o ile dobrze go znamy, nie było realnie możliwe, że zostanie prezydentem Polski. Po prostu nigdy się o to nie starał, a nawet nigdy taka myśl nie zaświtała mu w głowie.

Musimy tu Czytelnika uprzedzić, że wskazanego konfliktu nie rozwiązaliśmy, choć zasugerujemy pewne rozwiązanie. Być może ten konflikt jest wręcz nierozwiązywalny na gruncie szczególnych teorii modalności, tj. teorii typu *branching*, którymi się zajmujemy. Zbadamy natomiast pewną próbę rozwiązania problemu, która jest i intuicyjna, i pozwala na formalną precyzję. Jak się jednak okaże, cena za jej przyjęcie jest zbyt duża. Pomysł jest następujący: realne możliwości dotyczą konkretnych zdarzeń, zaś modalna demokracja – momentów czasu lub miejsc czasoprzestrzennych³. Mówiąc dokładniej, w każdym możliwym scenariuszu rozwoju świata panuje lokalny indeterminizm, czyli zachodzi w nim stosunkowo niewiele zdarzeń indeterministycznych. Z drugiej strony, w każdym momencie czasu (lub punkcie czasoprzestrzennym) w *jakimś* scenariuszu zachodzi zdarzenie indeterministyczne. Ściśle mówiąc, powinniśmy postawić mocniejszy postulat, który żądałby, aby w każdym momencie czasu (punkcie czasoprzestrzennym) w jakimś scenariuszu zachodziło zdarzenie indeterministyczne *odpo-*

¹ Pytanie to postawił jednemu z autorów (TP) J. Butterfield w lipcu 2004; było ono początkiem przedstawionych tu badań.

² Por. Brading, Castellani (2007).

³ Pomysł ten i jego pierwsze opracowanie zrodziły się w dyskusjach jednego z autorów (TP.) z T. Müllerem w czerwcu 2006 r.

wiedniego typu. Przykładowo, chociaż w realnej historii te dwa protony zderzyły się wtedy-to-awtedy, to dla każdego momentu czasu istnieje historia, w której w tym momencie zderzają się *właśnie te dwa protony*. Nie wprowadzamy jednak tego mocniejszego postulatu, ponieważ nawet bez niego wysłowiona powyżej idea rozwiązania konfliktu między realną możliwością a modalną demokracją będzie miała złe konsekwencje⁴.

Dyskusję prowadzimy na gruncie teorii typu *branching: branching-time* (BT) Priora (1967) i Thomasona (1970) oraz *branching space-times* (BST) Belnapa (1992). Wybieramy je, ponieważ są to obecnie jedyne matematycznie precyzyjne teorie możliwościowatowe. Co ważne, potrafią one formalnie wyrazić użyte powyżej intuicyjne pojęcia, takie jak: zdarzenie, zdarzenie wyboru (czyli indeterministyczne), możliwa przyszła kontynuacja zdarzenia, możliwa historia, chwila czasu/punkt czasoprzestrzenny, historia (in)deterministyczna w obszarze i inne. Niemniej teorie te są pojęciowo dość skromne, to znaczy nie mają obecnie środków do wyrażenia wielu ważnych pojęć. W szczególności, nie mają pojęcia prawa przyrody, które mogłoby posłużyć do próby rozwiązania konfliktu między realną możliwością a modalną demokracją. Można by bowiem powiedzieć, że to prawa mają być modalnie demokratyczne, to znaczy zachowywać symetrie (w szczególności czasoprzestrzenne), a realne możliwości mają odnosić się do realnych zdarzeń, procesów i indywiduów. Mógłby ktoś na przykład sądzić (błędnie – jak uważamy), że z punktu widzenia standardowej obecnie, lewisowskiej koncepcji możliwych światów opisany konflikt łatwo jest rozwiązać. Punktem wyjścia tej teorii jest możliwy świat; rozważamy następnie jego opis w jakimś języku przy pomocy zdań w czasie teraźniejszym i niezawierających wyrażen okazjonalnych. Rozpatrujemy potem różne aksjomatyzację tego opisu. Wybieramy tę aksjomatyzację, która maksymalizuje dwie przeciwne cechy: prostotę i moc. Tak uzyskany zbiór zdań nazywamy zbiorem praw przyrody rozważanego możliwego świata. (Lewis 1986, 1983)

Wątpliwe jest, aby opisana procedura gwarantowała, że prawa przyrody zachowują symetrie. Nie widać powodu, dlaczego aksjomaty najbardziej proste i mocne miałyby na przykład zachowywać symetrie czasoprzestrzenne. Moglibyśmy oczywiście postawić dodatkowy warunek, aby prawa zachowywały zadane symetrie. Czyli wybieralibyśmy wtedy jako prawa przyrody tę aksjomatyzację, która osiąga najlepszą równowagę co do trzech aspektów: spełniania zadanych symetrii, prostoty i mocy. Wtedy jednak mielibyśmy modalnie demokratyczne prawa możliwego świata dzięki naszemu postulatowi, a nie dzięki temu, jaki ten świat jest.

⁴ Oczywiście, mocny postulat byłby trudny do formalnego wyrażenia; wymaga on na przykład mówienia o rzeczywistym indywiduum istniejącym również w innych możliwych historiach.

Plan naszego tekstu wygląda następująco. W rozdziale 2 szkicujemy dwie teorie *branching*: BT i BST. W rozdziale 3 definiujemy model demokratyczny z lokalnym determinizmem, tj. model, w którym w dowolnej historii jest niewiele zdarzeń indeterministycznych, natomiast w każdym momencie/punkcie czasoprzestrzennym istnieje w jakiejś historii zdarzenie indeterministyczne. Wyniki dotyczące istnienia takich modeli w teorii BT przedstawiamy w rozdziale 4, zaś wyniki dotyczące teorii BST – w rozdziale 5. Dyskusja wyników, konkluzje i otwarte problemy znajdują się w ostatnim rozdziale 6.

II. Teorie *branching*: BT i BST

Teorie *branching* biorą swój początek w pracy A. Priora (1967) analizującej pojęcie czasowej możliwości. Jednym z zadań było zbudowanie semantyki dla języka, w którym występują zarówno operatory modalne, jak i czasy gramatyczne. Takie właśnie zadanie spełnia *branching-time* Priora-Thomasona (1967, 1970)⁵. Późniejsza o ćwierć wieku teoria *branching space-times* Belnapa (1992) uwzględnia dodatkowo aspekt przestrzenny zdarzeń i pewne aspekty relatywistyczne (szczegółnej teorii względności).

Obie teorie zasadzają się na intuicyjnym rozróżnieniu, zgodnie z którym przy danym stanie świata, pewne możliwości są realne, a inne nie są realne⁶. Te „nie-realne” możliwości być może są możliwe do pomyślenia albo są niesprzeczne z opisem dotychczasowego świata, albo nawet niesprzeczne z opisem dotychczasowego świata *i* (jakimiś) prawami przyrody świata. Słowo „dotychczasowe” oznacza, że realne możliwości są zrelatywizowane względem czasowych zdarzeń: coś, co kiedyś było realną możliwością, przestaje być realną możliwością później. Podstawowa różnica między BT a BST dotyczy pojęcia zdarzenia, a więc tego, względem czego określone są realne możliwości („stanu świata”). W BT zdarzenie jest maksymalnie duże przestrzennie; jest bowiem zdefiniowane jako momentalny przekrój świata, a więc ogół zdroworozsądkowych zdarzeń równoczesnych z zadaniem (zdroworozsądkowym) zdarzeniem. Odwołanie się do równoczesności oznacza, że BT nie jest teorią relatywistyczną. Punktem wyjścia BST jest natomiast zdarzenie punktowe.

1. BT

Przejdziemy teraz do formalnych definicji związanych z teorią BT. Jej pojęciami pierwotnymi są: niepusty zbiór W oraz częściowy porządek na tym zbiorze. Ele-

⁵ Nazwa BT jest wysoce niefortunna, ponieważ w BT nie ma żadnego rozgałęziania czasu, a co więcej, zbiór momentów czasowych jest uporządkowany liniowo. Rozgałęziają się natomiast możliwe scenariusze (historie).

⁶ Rozróżnienie między *real possibility* a *mere conceivability* opisane jest np. w Xu (1997).

menty W interpretujemy jako możliwe zdarzenia, przy czym przez „zdarzenie” rozumiemy momentalny przekrój świata, zadany przez relację równoczesności. Przez $e \leq e'$ rozumiemy, że zdarzenie e jest w przeszłości e' , albo równoważnie, że e' należy do możliwej przyszłości e .

Dowolny podzbiór $l \subseteq W$ nazywamy łańcuchem w W wtw, gdy dowolne elementy $e_1, e_2 \in l$ są porównywalne ze względu na porządek $\leq$, czyli albo $e_1 \leq e_2$, albo $e_2 \leq e_1$ ⁷.

DEFINICJA 1

Zbiór $h \subseteq W$ nazywamy historią wtw, gdy jest maksymalnym (ze względu na inkluzję) łańcuchem w W .

DEFINICJA 2

Zbiór wszystkich historii w modelu będziemy oznaczać przez $Hist$.

Zbiór wszystkich historii, do których należy zdarzenie e , będziemy oznaczać przez $H_{(e)}$.

Dla dowolnych historii $h_1, h_2 \in Hist$ dowolny element maksymalny w $h_1 \cap h_2$ nazywamy zdarzeniem wyboru dla h_1 i h_2 .

Zdarzenie e jest zdarzeniem wyboru w ogólności, jeśli jest zdarzeniem wyboru dla jakichś historii. Jeśli $e \in W$ nie jest zdarzeniem wyboru, to jest zdarzeniem deterministycznym.

Żeby podać pełną definicję modelu BT, potrzebujemy jeszcze definicji ścisłego porządku, który rozumiemy zwyczajnie, tj. $e_1 < e_1$ wtw, gdy $e_1 \leq e_2 \wedge e_1 \neq e_2$.

DEFINICJA 3

Uporządkowaną parę postaci $\mathfrak{B} = \langle W, \leq \rangle$, gdzie $W \neq \emptyset$ a $\leq$ jest częściowym porządkiem na W , nazywamy modelem BT wtw, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Dla dowolnych e_1, e_2, e_3 : jeśli $e_1 \leq e_3$ i $e_2 \leq e_3$ to $(e_1 \leq e_2 \text{ lub } e_2 \leq e_1)$ (brak rozgałęzień do tyłu).
2. Dla dowolnego $e_1 \in W$ oraz dowolnych $h_1, h_2 \in Hist$: jeśli $e_1 \in h_1/h_2$ to istnieje $e_2 \in W$ takie, że e_2 jest maksymalne w $h_1 \cap h_2$ i $e_2 < e_1$ (Zasada Wcześniejszego Wyboru – ZWW)⁸.

Podamy teraz kilka pojęć i faktów związanych z BT, które niezbędne będą w dalszej części naszego artykułu.

⁷ Piszemy „wtw, gdy” zamiast „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

⁸ Warunek ten jest mocniejszy od warunku podawanego przez Priora (1967), Thomasona (1970), Belnapa i in. (2001), zgodnie z którym dowolne dwie historie mają mieć niepuste przecięcie, pozwalając, aby w przecięciu historii nie było elementu maksymalnego – por. dyskusję u Belnapa i in. (2001). Przyjęliśmy tu mocniejszy warunek, aby upodobnić nasze definicje dotyczące BT i BST.

DEFINICJA 4

Powiemy, że historie $h_1, h_2 \in \text{Hist}$ nie rozdzielają się w zdarzeniu $e \in W$, $h_1 \equiv_e h_2$ wtw, gdy $\exists e' \in W$: $e < e' \wedge e' \in h_1 \cap h_2$.

Powiemy, że historie $h_1, h_2 \in \text{Hist}$ rozdzielają się w zdarzeniu $e \in W$, $h_1 \perp_e h_2$ wtw, gdy $e \in h_1 \cap h_2$ oraz $\neg \exists e' \in W$: $e < e' \wedge e' \in h_1 \cap h_2$.

Nietrudno zauważyć, iż relacja $\equiv_e$ jest relacją równoważnościową na zbiorze $H_{(e)}$. W związku z tym związany jest z nią podział Π_e zbioru $H(e)$. Dla dowolnych $h_1, h_2 \in H_{(e)}$ oraz dowolnego $P \in \Pi_e$ jest tak, że $h_1, h_2 \in P$ wtw, gdy $h_1 \equiv_e h_2$.

DEFINICJA 5

Dowolny element partycji Π_e będziemy nazywać *możliwością otwartą* w zdarzeniu e .

Łatwo pokazać, że zdarzenie e jest zdarzeniem wyboru (tj. jest elementem maksymalnym w przecięciu jakichś historii) wtw, gdy $\text{card}(\Pi_e) > 1$, oraz że zdarzenie e jest zdarzeniem deterministycznym wtw, gdy odnośny podział jest jednoelementowy.

Potrzebujemy jeszcze maszynerii, która będzie pozwalała nam mówić, iż dwa zdarzenia z różnych historii mają miejsce w tym samym czasie. W tym celu wprowadzimy pojęcie modelu BT z chwilami.

DEFINICJA 6

Uporządkowaną trójkę postaci $\mathfrak{B} = \langle W, \leq, I \rangle$ nazywamy modelem BT z chwilami (BT+I) wtw, gdy $\langle W, \leq \rangle$ jest modelem BT, a I (od 'instant') relacją równoważnościową na zbiorze W spełniającą następujące warunki:

1. Dla dowolnej historii $h \in \text{Hist}$ i dowolnej klasy równoważności $[e]$ wygenerowanej przez I , $e \in W$ przecięcie $h \cap [e]$ zawiera dokładnie jeden element.
2. Relacja I zachowuje porządek, tj. dla dowolnych klas równoważności $[e_1], [e_2]$ oraz dowolnych historii h_1, h_2 : $[e_1] \cap h_1 \leq [e_2] \cap h_1$ wtw, gdy $[e_1] \cap h_2 \leq [e_2] \cap h_2$.

Elementy podziału W generowane przez I (czyli klasy równoważności ze względu na relację I) nazywać będziemy chwilami. Klasę równoważności dla zdarzenie e będziemy oznaczać przez $[e]$.

Na koniec fakt, który podajemy bez dowodu. Odnotujmy tylko, że do jego dowodu potrzebny jest lemat Kuratowskiego-Zorna.

FAKT 7

Dowolny łańcuch $l \subseteq W$ w modelu BT można rozszerzyć do historii $h \in \text{Hist}$ ($l \subseteq h$) w tym modelu.

2. BST

Belnapa (1992) teoria BST łączy obiektywny indeterminizm z relatywistyczną czasoprzestrzenią. Ma dwa pojęcia pierwotne: niepusty zbiór W , interpretowany jako zbiór wszystkich możliwych zdarzeń punktowych, oraz częściowy porządek $\leq$ na W , interpretowany jako porządek przyczynowy między zdarzeniami punktowymi.

Parę $\mathfrak{W} = \langle W, \leq \rangle$ nazywa Belnap „Naszym Światem”; zauważmy, że w teorii nie ma możliwych światów, tylko jeden Nasz Świat, zawierający wszelkie realne możliwości. W Naszym Świecie można wyodrębnić możliwe scenariusze, nazywane *historiami* i zdefiniowane następująco:

DEFINICJA 8

Zbiór $h \subseteq W$ jest do góry skierowany wtw, gdy $\forall e_1, e_2 \in h \exists e \in h$ takie, że $e_1 \leq e$ i $e_2 \leq e$.

Zbiór h jest maksymalny ze względu na powyższą własność wtw, gdy $\forall g \subseteq W$ takiego, że $h \subsetneq g$, g nie jest skierowany do góry.

Podzbiór $h \subset W$ jest historią wtw, gdy h jest maksymalnym skierowanym do góry podzbiorem W .

W dalszym tekście przydatne będą następujące pojęcia, zdefiniowane analogicznie jak w BT: *Hist* czyli zbiór wszystkich historii, $H_{(e)} = \{h \in Hist \mid e \in h\}$. Maksymalny element w $h_1 \cap h_2$, gdzie $h_1, h_2 \in Hist$, nazywamy zdarzeniem wyboru dla h_1 i h_2 . Zdarzenie e jest zdarzeniem wyboru, jeśli jest zdarzeniem wyboru dla jakichś historii; w przeciwnym wypadku jest zdarzeniem deterministycznym. Uwzględnienie przestrzeni pozwala wprowadzić pojęcie rodem ze szczególnej teorii względności:

DEFINICJA 9

Dla $e_1, e_2 \in W$, powiadamy, że e_1 i e_2 są położone przestrzennie (e_1 PP e_2) wtw, gdy $\exists h \in Hist: e_1, e_2 \in h$ i $e_1 \not\leq e_2$ i $e_2 \not\leq e_1$.

Przy powyższej definicji historie są domknięte w dół:

FAKT 10

Dla dowolnych $e, e' \in W$ i oraz dowolnej $h \in Hist$, jeśli $e \in h$ i $e' \leq e$, to $e' \in h$.

Ostatecznie, definicja modelu BST przedstawia się następująco (więcej informacji o BST można znaleźć u Belnapa (1992)).

DEFINICJA 11

Niech $W \neq \emptyset$ oraz niech $\leq$ będzie częściowym porządkiem na W . Modelem BST nazywamy strukturę $\mathbb{B} = \langle W, \leq \rangle$, która spełnia następujące warunki:

1. Porządek $\leq$ jest gęsty.
2. $\langle W, \leq \rangle$ nie ma elementów maksymalnych.
3. Każdy ograniczony z dołu łańcuch w W ma infimum (największe ograniczenie dolne) w W .
4. Każdy ograniczony od góry łańcuch w W ma supremum (najmniejsze ograniczenie górne) w każdej historii, w której się zawiera.
5. (Zasada wcześniejszego wyboru – ZWW) Dla dowolnego ograniczonego od dołu łańcucha $O \subseteq h_1/h_2$ istnieje zdarzenie $e \in W$ takie, że e jest maksymalne w $h_1 \cap h_2$ i $\forall e' \in O: e < e'$.

(Ścisły porządek $<$ jest definiowany jak zwykle, tj. $x < y$ wtw $x \leq y$ i $x \neq y$.)

Oto kilka faktów na temat BST, które będą nam potrzebne dalej. Wprowadzamy dwie relacje na zbiorze $Hist$: rozgałęziania $\perp_e$ i nierozdzielania $\equiv_e$ w danym zdarzeniu e :

DEFINICJA 12

Historie h_1 i h_2 nie rozdziela się w zdarzeniu e , $h_1 \equiv_e h_2$ wtw, gdy $\exists e': e < e' \wedge e' \in h_1 \cap h_2$.

Historie h_1 i h_2 rozdziela się w zdarzeniu e , $h_1 \perp_e h_2$ wtw, gdy $e \in h_1 \cap h_2$ oraz $\neg(h_1 \equiv_e h_2)$.

Warunki definicji modelu BST (powyżej) zapewniają, że $\equiv_e$ jest relacją równoważności na zbiorze $H(e)$. To z kolei znaczy, że $\equiv_e$ generuje podział Π_e zbioru $H(e)$: dla elementu P podziału Π_e mamy $h_1, h_2 \in P \Leftrightarrow h_1 \equiv_e h_2$. Pojęcie podziału Π_e służy do wprowadzenia następujących potrzebnych dalej pojęć:

DEFINICJA 13

Przez możliwość otwartą w zdarzeniu e (inaczej: możliwą kontynuację zdarzenia e) rozumiemy dowolny element podziału Π_e .

Łatwo jest udowodnić, że e jest zdarzeniem wyboru (tj. elementem maksymalnym w przecięciu jakichś dwóch historii) wtw, gdy $\text{card}(\Pi_e) > 1$.

Jak wspomnieliśmy, niezwykle istotne dla obecnego zadania jest rozróżnienie między zdarzeniami a tym, gdzie i kiedy one się zdarzają. Ponieważ BST respektuje relatywistyczne ograniczenia, nie pozwala ona mówić o chwilach (momentach) ani położeniach, a tylko o punktach czasoprzestrzennych. Wprowadzamy relację odpowiadającą intuicji: zdarzenia z różnych historii zachodzą w tym samym punkcie czasoprzestrzeni. Idąc za Müllerem (2005), mówimy, że trójka $\langle W, \leq, S \rangle$

jest modelem BST z punktami czasoprzestrzennymi (BST+S) dokładnie wtedy, gdy $\langle W, \leq \rangle$ jest modelem BST, a S (od wyrażenia ‘*space-time point*’) jest relacją równoważnościową na W taką, że 1) dla każdej historii h w W oraz każdej klasy równoważności $[x]$, $x \in W$, przecięcie $h \cap [x]$ zawiera dokładnie jeden element i 2) S zachowuje porządek: dla dowolnych klas równoważności $[x]$, $[y]$ i historii h_1, h_2 : $[x] \cap h_1 = [y] \cap h_1$ wtw $[x] \cap h_2 = [y] \cap h_2$, i podobnie dla ‘ $\leq$ ’ i ‘ PP ’. Przez $[e]$ rozumiemy klasę równoważności zdarzenia $e \in W$ z uwagi na relację S ; takie klasy równoważności będziemy nazywali punktami czasoprzestrzennymi. Dlatego piszemy $s \in W/S$, rozumiejąc przez to, że s należy do zbioru ilorazowego W względem relacji S , czyli że s jest punktem czasoprzestrzennym. Jak pokazał Müller, nie każdy model BST daje się rozszerzyć do modelu BST+S.

III. Demokratyczne modele *branching*

Czas przypomnieć nasz pomysł rozwiązania konfliktu między realną możliwością a modalną demokracją przy założeniu lokalnego indeterminizmu. Założenie to mówi, że w dowolnej historii zdarzeń indeterministycznych (zdarzeń wyboru) jest stosunkowo niewiele. Realna możliwość dotyczy zdarzeń: w zdarzeniu wyboru otwarta jest więcej niż jedna możliwość. Modalna demokracja dotyczy zaś geometrycznego aspektu świata: żadna chwila w BT nie jest wyróżniona, bo należy do niej w jakiejś historii zdarzenie wyboru, żaden punkt czasoprzestrzenny nie jest wyróżniony w BST, bo należy do niego, w jakiejś historii, zdarzenie wyboru.

Intuicje te chcemy uchwycić, definiując pojęcie demokratycznego modelu BT i demokratycznego modelu BST. Podana poniżej definicja dotyczy obu teorii. Zanim do niej przejdziemy, musimy zdecydować, jak rozumieć to, że w historii jest *stosunkowo niewiele* zdarzeń wyboru. W obecnym tekście przyjmujemy, że oznacza to, że jest ich skończenie wiele. Zgadza się jednak, że warto są rozważenia niektóre inne interpretacje, jak na przykład „istnieje minimalny dystans (czasowy w BT, czasoprzestrzenny w BST) między dowolnymi dwoma zdarzeniami”, co jest motywowane zasadą Heisenberga.

Do konstrukcji definicji modelu demokratycznego potrzebnych jest nam kilka pojęć. Przez ZW będziemy oznaczać ogół zdarzeń wyboru, a przez ZW_h – ogół zdarzeń wyboru należących do historii h w modelu (BT albo BST). Oczywiście, $ZW = \bigcup \{ZW_h : h \in \text{Hist}\}$.

W niektórych zdarzeniach istnieje nieskończenie wiele otwartych możliwości. To oznacza, że liczność podziału Π_e takiego zdarzenia e jest nieskończona. Zwróćmy uwagę, że jest to mocniejszy warunek niż to, że zbiór $H_{(e)}$ historii jest nieskończony. Będziemy mówić, że e jest zdarzeniem multiwyboru (*zmw*) wtedy, gdy $\text{card}(\Pi_e) \geq \aleph_0$. Oczywiście, jeśli e jest *zmw*, to $e \in ZW$.

DEFINICJA 14

Demokratycznym modelem teorii branching, BT albo BST nazywamy taki model BT z chwilami albo taki model BST z punktami czasoprzestrzennymi, że:

1. *W każdej historii jest tylko skończenie wiele zdarzeń wyboru:*

$$\forall h \in \text{Hist}: \text{card}(ZW_h) < \aleph_0;$$

2. *W każdej chwili (BT) albo w każdym punkcie czasoprzestrzennym (BST) znajduje się jakieś zdarzenie wyboru:*

$$\text{BT}: \forall i \in W/I \exists e: e \in ZW \wedge e \in i$$

$$\text{BST}: \forall s \in W/S \exists e: e \in ZW \wedge e \in s$$

Demokratyczne modele BT i BST będziemy oznaczać, odpowiednio, przez D-BT i D-BST.

IV. Demokratyczne modele BT: wyniki

Przedstawimy teraz nasze wyniki związane z demokratycznymi modelami BT.

TWIERDZENIE 15

Każdy model D-BT ma element najmniejszy i jest on zdarzeniem wyboru.

Dowód tego twierdzenia wymaga kilku prostych faktów.

FAKT 16

Każda historia dowolnego modelu D-BT ma element minimalny.

Dowód. Dla dowodu nie wprost założmy, że wybrana historia h nie ma elementu minimalnego. Ponieważ w historii h jest skończenie wiele zdarzeń wyboru (z definicji modelu D-BT), zatem w historii h musi istnieć minimalne zdarzenie wyboru e . Na mocy założenia nie wprost e nie jest elementem minimalnym w h , więc istnieje $e_1 \in h$ takie, że $e_1 < e$. Niech $i \in W/I$ będzie chwilą, do której należy zdarzenie e_1 . Definicja modelu D-BT gwarantuje, iż do chwili i należy zdarzenie wyboru $e' \in h'$, dla jakiegoś h' . Zdarzenie e' jest nieporównywalne z e , bo w przeciwnym wypadku byłoby $e' \in h$, co jest sprzeczne z założeniem, że e jest minimalnym zdarzeniem wyboru w h . Z nieporównywalności wynika, że $e \notin h'$, czyli $e \in h/h'$. Na mocy ZWW istnieje zdarzenie wyboru pod e i w historii h – sprzeczność z założeniem, że e jest minimalnym zdarzeniem wyboru w h . □

Kolejny fakt jest prostą konsekwencją tego, że historie są łańcuchami:

FAKT 17

Minimalny element e dowolnej historii h w dowolnym modelu BT jest elementem najmniejszym h .

FAKT 18

Dla dowolnego modelu BT oraz dowolnej historii h w tym modelu, jeśli h posiada element najmniejszy e , to jest on najmniejszy w całym modelu.

Dowód. Wybierzmy historię h , która posiada element najmniejszy e , i założmy nie wprost, że e nie jest najmniejszy w W , czyli dla jakiegoś e' : $\neg(e \leq e')$. Jeśli $e' < e$, to z definicji historii jako maksymalnego łańcucha, $e' \in h$ – sprzeczność z założeniem, że e jest najmniejszym elementem h . Jeśli zaś e i e' są nieporównywalne, to $e' \notin h$, ale na mocy Faktu 7 istnieje historia, nazwijmy ją h' : $e' \in h'$. Ale też $e \notin h'$, bo w przeciwnym wypadku e i e' byłyby porównywalne. Ponieważ więc $e \in h/h'$, to na mocy ZWW istnieje c takie, że $c < e$ i $c \in h \cap h'$ – sprzeczność z tym, że e jest najmniejszym elementem h . □

Możemy teraz udowodnić twierdzenie 15.

Dowód. Z faktów 16, 17 oraz 18 wynika, iż dowolny model D-BT ma element najmniejszy. Nazwijmy go e . Zdarzenie e należy do jakiejś chwili $i \in W/I$ oraz jest jedynym elementem tej chwili. Ponieważ każda chwila zawiera zdarzenie wyboru (definicja modelu D-BT), zatem e jest zdarzeniem wyboru. □

Zanim przejdziemy do dowodu dwóch głównych twierdzeń tego rozdziału, udowodnimy jeszcze dwa proste fakty.

FAKT 19

Jeśli model D-BT ma nieskończenie wiele chwil, to ma nieskończenie wiele historii.

Dowód. Z definicji modelu D-BT wiemy, że każda chwila zawiera przynajmniej jedno zdarzenie wyboru. Zatem w dowolnym modelu D-BT z nieskończoną ilością chwil jest nieskończenie wiele zdarzeń wyboru. Ponieważ ilość historii w modelu nie może być mniejsza od ilości zdarzeń wyboru w tym modelu, więc dowolny odpowiedni model D-BT zawiera nieskończenie wiele historii. □

FAKT 20

Niech $e_1, e_2 \in ZW$ i $h \in P$ dla jakiejś otwartej możliwości $P \in \Pi_{e_1}$. Jeśli e_2 jest najmniejszym leżącym nad e_1 zdarzeniem wyboru z h , wówczas jest ono najmniejszym zdarzeniem wyboru leżącym nad e_1 dla całej możliwości P , tj. $\forall h' \in P \forall e' \in ZW_h: (e_1 < e' \rightarrow e_2 \leq e')$.

Dowód. Dla dowodu nie wprost założmy, iż istnieje historia $h^* \in P$, do której należy zdarzenie wyboru c takie, że $e_1 < c$, i albo $c < e_2$, albo c i e_2 są nieporównywalne. W pierwszym wypadku z definicji historii od razu wynika, iż $c \in h$,

a to jest sprzeczne z założeniem, iż e_2 jest najmniejszym zdarzeniem wyboru w h leżącym nad e_1 . W drugim przypadku $e_2 \notin h^*$, zatem $e_2 \in h/h^*$. Na mocy ZWW istnieje więc zdarzenie wyboru c' takie, iż $c' < e_2$ oraz c' jest maksymalne w $h \cap h^*$. Oczywiście $c' > e'$, gdyż $h \equiv_{e_1} h^*$. To jednak też jest sprzeczne z założeniem, że e_2 jest najmniejszym zdarzeniem wyboru w h leżącym nad e_1 . □

Możemy teraz wysłowić i udowodnić dwa twierdzenia, ukazujące specyficzny charakter demokratycznych modeli BT.

TWIERDZENIE 21

Jeśli model D-BT ma nieskończenie wiele chwil, to istnieje w nim zdarzenie multiwyboru (zmv).

Dowód. Niech $\mathfrak{B}$ będzie dowolnym modelem D-BT z nieskończoną ilością chwil. Dla dowodu nie wprost założmy, że nie ma w nim żadnego zdarzenia multiwyboru. Pamiętajmy jednak, że $\mathfrak{B}$ ma element najmniejszy, nazwijmy go e_0 ; co więcej, jest on zdarzeniem wyboru (por. Twierdzenie 15). Ponieważ $\mathfrak{B}$ zawiera nieskończenie wiele historii (patrz Fakt 19), zatem e_0 należy do nieskończenie wielu historii. Skoro e_0 nie jest zdarzeniem multiwyboru (z założenia nie wprost), to przynajmniej jedna spośród możliwości otwartych w e_0 zawiera nieskończenie wiele historii. Wybierzmy jedną z takich możliwości otwartych, nazwijmy ją P ($P \in \Pi_{e_0}$), a następnie wybierzmy jakąś historię h_0 należącą do P . Następnie weźmy pierwsze zdarzenie wyboru leżące nad e_0 i nazwijmy je e_1 . Takie zdarzenie istnieje, gdyż liczność P jest nieskończona, a historie należące do P nie rozdziela się w zdarzeniu e_0 , muszą zatem rozdzielać się w jakimś zdarzeniu powyżej e_0 . Tak więc w każdej historii $h \in P$ znajdzie się zdarzenie wyboru leżące nad zdarzeniem e_0 . Niech $l_0 := [e_0, e_1]$.

Zauważamy następnie, że e_1 należy do nieskończenie wielu historii, bo należy do każdej historii z P . Jeśliby $e_1 \notin h'$, $h' \in P$, to na mocy ZWW istniałoby zdarzenie wyboru c w h_0 takie, że $e_0 < c < e_1$, co jest sprzeczne z tym, że e_1 ma być najmniejszym zdarzeniem wyboru w h_0 powyżej e_0 . Powtarzamy to samo rozumowanie w odniesieniu do zdarzenia e_1 : należy ono do nieskończenie wielu historii, nie jest ono zdarzeniem multiwyboru, więc jedna z jego możliwości otwartych zawiera nieskończenie wiele historii. Wybieramy zatem taką nieskończoną możliwość otwartą, a następnie jakąś należącą do niej historię. Lokalizujemy pierwsze zdarzenie wyboru leżące powyżej e_1 , a należące do wybranej historii, nazwijmy je e_2 , po czym kładziemy $l_1 := l_0 \cup [e_1, e_2]$.

Korzystając z tej procedury, tworzymy nieskończony zbiór przedziałów $l_0, l_1, \dots$, uporządkowany relacją inkluzji. Sumę po tym zbiorze stanowi łańcuch w uniwersum modelu $\mathfrak{B}$, który zawiera nieskończenie wiele zdarzeń wyboru. Na mocy Faktu 7 łańcuch ten może być rozszerzony do historii, która w takim

razie zawierać będzie nieskończenie wiele zdarzeń wyboru, co jest sprzeczne z definicją modelu D-BT. Ponieważ zaś model $\mathfrak{B}$ był wybrany dowolnie, twierdzenie dotyczy każdego modelu demokratycznego.

Nieco dokładniej i bardziej formalnie. Niech F_1 , F_2 and F_3 będą następującymi funkcjami:

$$F_1: W \rightarrow \bigcup_{e \in W} \Pi_e \text{ oraz } F_1(e) = \begin{cases} \text{zbiór } P \in \Pi_e \text{ jeśli } \text{card}(P) \geq \omega; \\ \emptyset \text{ jeśli } \forall P \in \Pi_e: \text{card}(P) < \omega; \end{cases} \quad (1)$$

$$F_2: \bigcup_{e \in W} \Pi_e \rightarrow W \times \text{Hist} \text{ takie, że } F_2(P) = \langle e, h \rangle \text{ gdzie } h \in P \text{ oraz } P \in \Pi_e \quad (2)$$

Zauważmy, że zarówno funkcji F_1 , jak i funkcji F_2 jest nieskończenie wiele. Niech więc nasze F_1 i F_2 będą dwoma dowolnymi, ale ustalonymi funkcjami spełniającymi powyższe warunki.

$$F_3: W \times \text{Hist} \rightarrow ZW \text{ oraz}$$

$$F_3(\langle e, h \rangle) = \begin{cases} e' \in ZW_h \text{ jeśli } e' < e \text{ i } \neg \exists e''(e'' \in ZW_h \wedge e < e'' < e') \text{ o ile istnieje;} \\ e \text{ w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (3)$$

Pamiętajmy, że e_0 jest najmniejszym elementem modelu $\mathfrak{B}$. Dla dowolnego, nieograniczonego α , $0 < \alpha$ kładziemy:

$$e_\alpha = F_3(F_2(F_1(e_{\alpha-1}))) \quad l_0 = \emptyset \quad l_\alpha = l_{\alpha-1} \cup [e_{\alpha-1}, e_\alpha].$$

Zauważmy, że dla każdego $0 < \alpha < \omega$: $e_{\alpha-1} \neq e_\alpha$. Ponieważ $e_{\alpha-1}$ należy do nieskończenie wielu historii, ale nie jest zdarzeniem multiwyboru, musi posiadać co najmniej jedną nieskończoną możliwość otwartą. Dalej, każda historia z tej możliwości otwartej musi się rozdzielać z każdą inną należącą do tej samej możliwości w jakimś punkcie powyżej $e_{\alpha-1}$. Zatem w każdej historii przechodzącej przez $e_{\alpha-1}$ znajdują się zdarzenia wyboru leżące nad $e_{\alpha-1}$, a ponieważ zdarzeń tych może być co najwyżej skończenie wiele (definicja modelu D-BT), więc musi być pierwsze leżące nad $e_{\alpha-1}$. Otrzymujemy zatem łańcuch zbiorów:

$$l_0 \subset l_1 \subset l_2 \dots \subset l_\alpha \dots \text{ gdzie } \alpha < \omega.$$

Kładziemy $l^* = \bigcup_{0 \leq \beta < \omega} l_\beta$. Łatwo zauważyć, że l^* zawiera nieskończenie wiele zdarzeń wyboru i jest łańcuchem w uniwersum modelu $\mathfrak{B}$. Na mocy Faktu 7 łańcuch l^* może zostać rozszerzony do historii. Nazwijmy ją h^* . Jest oczywiste, iż h^* zawiera nieskończenie wiele zdarzeń wyboru, a to jest sprzeczne z definicją modelu D-BT, co kończy dowód.

□

TWIERDZENIE 22

Jeśli model D-BT ma nieskończenie wiele chwil i porządek $\leq$ w tym modelu jest gęsty, to najmniejszy element modelu jest zdarzeniem multiwyboru(zmw).

Dowód. Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolnym modelem D-BT z nieskończoną ilością chwil, w którym porządek $\leq$ jest gęsty. Dla dowodu nie wprost założymy, iż element najmniejszy w $\mathfrak{M}$, nazwijmy go e , nie jest zmw. Zatem partycja Π_e jest skończona, powiedzmy m -elementowa, czyli ma postać: $\{P_1, \dots, P_m\}$. Niech e_n ($0 < n \leq m$) oznacza najmniejsze zdarzenie wyboru leżące nad e w n -tej możliwości otwartej ze zbioru Π_e jeśli takowe istnieje, czyli $e_n \in \bigcup \{h \in P_n\}$ i

$$\forall h \in P_n \quad \forall e' \in ZW_h: (e < e' \rightarrow e_n \leq e').$$

Może się zdarzyć, iż jakieś P_n jest jednoelementowe, a wówczas $h \in P_n$ nie zawiera żadnych zdarzeń wyboru leżących nad e . W takim przypadku niech e_n oznacza dowolne zdarzenie z historii h leżące nad e .

Jeśli jednak jakieś P_n jest wieloelementowe, a muszą być takie możliwości otwarte, gdyż w całym modelu jest nieskończenie wiele historii (Fakt 19), a e nie jest zmw (założenie nie wprost), wówczas historie należące do P_n muszą rozdzielać się gdzieś powyżej zdarzenia e . Weźmy zatem dowolną historię $h \in P_n$. Ma ona jakieś zdarzenia wyboru leżące nad e oraz, co więcej, ma ich skończenie wiele (definicja modelu D-BT). W takim razie istnieje najmniejsze zdarzenie wyboru należące do h , które znajduje się nad e . Na mocy Faktu 20 wiadomo, iż zdarzenie to jest najmniejsze dla całej możliwości otwartej P_n .

Niech $M = \{[e_n] : 0 < n \leq m\}$. Do M należą zatem wszystkie chwile zawierające najmniejsze zdarzenie wyboru dla jakiejś możliwości otwartej w e . Zbiór M jest oczywiście skończony (w naszym przypadku m -elementowy), natomiast chwile w każdym modelu BT są uporządkowane liniowo. Wybierzmy zatem najmniejszą chwilę należącą do M i nazwijmy ją $[c]$. Z gęstości porządku wiemy, iż istnieje $[c']$ takie, że $[e] < [c'] < [c]$, zaś z definicji M wiemy, iż do $[c']$ nie należy żadne zdarzenie wyboru, a to jest sprzeczne z definicją modelu D-BT. Ponieważ $\mathfrak{M}$ było dowolnym modelem, twierdzenie obowiązuje ogólnie. □

Podsumowując nasze spostrzeżenia, jeśli model D-BT ma nieskończenie wiele chwil, to ma co najmniej jedno zdarzenie multiwyboru i zaczyna się w jednym zdarzeniu, które jest zdarzeniem wyboru. Jeśli, co więcej, porządek jest gęsty, to to najmniejsze zdarzenie w modelu jest ponadto zdarzeniem multiwyboru.

V. Demokratyczne modele BST: wyniki

Branching space-times jest teorią, która stawia sobie za cel uchwycenie pewnych zjawisk opisywanych przez szczególną teorię względności. Tak jak szczególna teoria względności, BST dopuszcza istnienie zdarzeń wzajemnie od siebie przyczynowo niezależnych. O żadnej parze takich zdarzeń nie można w sposób bezwzględny powiedzieć, że jedno z nich jest w przeszłości lub przyszłości drugiego. Ten fakt sprawia, że nie uda nam się dowieść, że w każdym modelu D-BST jest element najmniejszy będący zdarzeniem wyboru. Takie twierdzenie zachodzi w modelach D-BT, por. Twierdzenie 15. Modele D-BST mają jednak podobną cechę:

TWIERDZENIE 23

W każdym modelu D-BST zbiór ZW_{min} minimalnych zdarzeń wyboru jest skończony; każdy element modelu jest nad lub jest identyczny z którymś elementem zbioru ZW_{min} .

W odróżnieniu od sytuacji w BT, nie musi istnieć jedno zdarzenie, które byłoby najmniejszym elementem w całym demokratycznym modelu. Ale, jak się okaże, są w modelu D-BST minimalne elementy, czyli takie, pod którymi nie ma już elementów modelu, a ponadto każdy element modelu jest nad którymś z tych minimalnych elementów. Takie minimalne elementy modelu nazywamy minimalnymi zdarzeniami. Twierdzenie powyżej mówi, że zbiór minimalnych zdarzeń jest skończony i każdy jego element jest zdarzeniem wyboru. Ponieważ, jak się okaże (Fakt 25), wszystkie minimalne zdarzenia wyboru należą do jednej historii, z minimalności mamy ponadto

$$\forall e_1, e_2: e_1, e_2 \in ZW_{min} \wedge e_1 \neq e_2 \rightarrow e_1 PP e_2$$

Dowód twierdzenia 23 wymaga dowiedzenia kilku prostych faktów.

FAKT 24

Każde zdarzenie w każdej historii modelu D-BST znajduje się nad jakimś zdarzeniem minimalnym albo jest z nim identyczne.

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje historia h i zdarzenie $e \in h$ takie, że e nie jest nad ani identyczne z żadnym zdarzeniem minimalnym. Twierdzimy teraz, że pod e znajdują się jakieś zdarzenia wyboru. Jako że e nie jest zdarzeniem minimalnym w h , to istnieje jakieś zdarzenie $c < e$. Albo $c \in ZW_h$, albo, jeśli $c \notin ZW_h$, to na mocy definicji D-BST istnieje takie $zw_1 \in ZW$, że $zw_1 \in [c]$. Na mocy ZWW $\exists zw_2 \in ZW_h: zw_2 < zw_1 \wedge zw_2 < c < e$. Zatem, tak czy inaczej, istnieją zdarzenia wyboru pod e . Jako że w h jest ich tylko skończenie wiele, to można wybrać jakieś jedno, minimalne zdarzenie wyboru zw^* znajdujące się pod e . Ponieważ e nie leży nad zdarzeniem minimalnym, to zw^* nie

może być zdarzeniem minimalnym w historii h . Zatem istnieje jakieś zdarzenie $e' < zw^*$. Jednak e' nie jest zdarzeniem wyboru, a w punkcie czasoprzestrzennym $[e']$ znajduje się jakieś zdarzenie wyboru. Wobec tego istnieje historia, do której e' nie należy, a zatem na mocy ZWW istnieje zdarzenie wyboru $zw_3 < e'$. Zatem $zw_3 < zw^* < e$, co stanowi sprzeczność z tym, że zw^* jest minimalnym zdarzeniem wyboru pod e . □

FAKT 25

Niech $\mathfrak{B}$ będzie modelem D-BST. Zdarzenie minimalne historii h w modelu $\mathfrak{B}$ jest zdarzeniem minimalnym każdej innej historii tego modelu.

Dowód. Załóżmy, że jest inaczej, to znaczy istnieje zdarzenie minimalne e historii h , które nie jest zarazem zdarzeniem minimalnym innej historii h' . Mamy teraz dwa przypadki: (1) $e \in h'$ albo (2) $e \notin h'$. W przypadku (1) istnieje $e^* \in h'$ i $e^* < e$, bo z założenia e nie jest minimalnym zdarzeniem h' . Ponieważ historie są domknięte w dół (Fakt 1'), $e^* \in h$: sprzeczność z założeniem, że e jest minimalnym zdarzeniem h . W przypadku (2) ZWW mówi, że musi istnieć zdarzenie wyboru zw leżące pod e , w którym historie h i h' się rozdzielają: sprzeczność z tym, że e jest zdarzeniem elementem h .

Zatem wszystkie minimalne zdarzenia każdego modelu D-BST są wspólne dla wszystkich historii. □

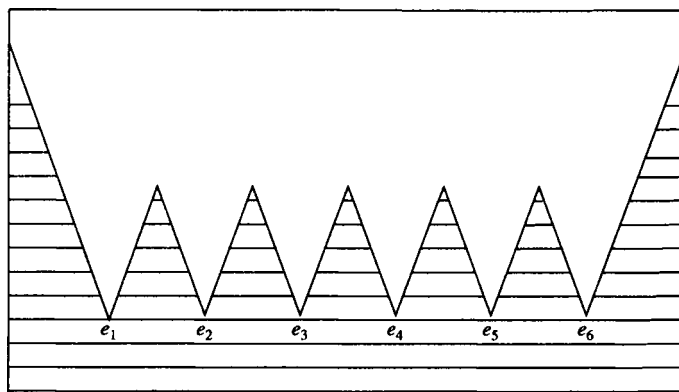
FAKT 26

W każdym modelu D-BST jest skończenie wiele zdarzeń minimalnych i wszystkie one są zdarzeniami wyboru.

Dowód. Ponieważ dowolne zdarzenie minimalne należy do wszystkich historii modelu (Fakt 25), to dowolne dwa różne zdarzenia minimalne muszą należeć do różnych punktów czasoprzestrzennych. Ponieważ w każdym punkcie czasoprzestrzennym znajduje się zdarzenie wyboru (warunek 2 definicji modelu D-BST), każde zdarzenie minimalne jest więc zdarzeniem wyboru. Warunek 1 definicji D-BST gwarantuje z kolei, że w każdej historii jest skończenie wiele zdarzeń wyboru, a więc również skończenie wiele minimalnych zdarzeń wyboru. Stąd wynika (przez Fakt 25), że zbiór minimalnych zdarzeń modelu jest skończony.

Z faktów 24 i 26 wynika twierdzenie 23.

Zatem każda historia w dowolnym modelu D-BST rozpoczyna się w dokładnie taki sam sposób, który ilustruje Rysunek 1. Przedstawia on historię w modelu D-BST z sześcioma minimalnymi elementami – zdarzeniami wyboru.



Rys. 1. Zdarzenia $e_1, \dots, e_6$ to jedyne zdarzenia należące do wszystkich historii naszego modelu. W zakreskowanym polu nie mogą znajdować się żadne zdarzenia.

Widzimy, że każdy model D-BST ma bardzo specyficzną postać. Kolejne twierdzenie pokaże, że takie modele spełniają jeszcze silniejsze warunki, mianowicie:

TWIERDZENIE 27

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem D-BST. Każde zdarzenie wyboru ze zbioru ZW_{min} modelu $\mathfrak{M}$ jest zdarzeniem multiwyboru (zmv).

Dowód. Weźmy zdarzenie c ze zbioru ZW_{min} . Dla dowodu nie wprost założmy, że c nie jest zmv. Zatem liczność podziału Π_c jest skończona. Rozważmy teraz następujący warunek na historii:

WAR: W historii istnieją zdarzenia wyboru, które są powyżej c , ale nie powyżej jakiegokolwiek innego $zw \in ZW_{min}$.

Będziemy teraz argumentować, że istnieją historie spełniające ten warunek. To oczywiście znaczy, że są takie elementy podziału Π_c , do których należą historie spełniające WAR.

Zauważmy najpierw, że w każdej historii h , do której należy c , jest jakieś zdarzenie e , które leży nad c i nie leży nad żadnym innym zdarzeniem wyboru należącym do ZW_{min} . Założmy, że jest inaczej, to znaczy, że $(\dagger)$ dowolne zdarzenie e z historii h i leżące nad c leży nad lub jest identyczne z jakimś innym zdarzeniem wyboru należącym do ZW_{min} . Jeśli c jest jedynym elementem ZW_{min} , to WAR oczywiście jest spełniony. Założmy więc, że $card(ZW_{min}) > 1$, i weźmy jakieś e , które leży nad c i leży nad lub jest identyczne z jakimś innym elementem ZW_{min} . Takie e istnieje na mocy $(\dagger)$. Rozważmy teraz jakiś interwał L taki, że

$e' \in L \rightarrow c \leq e' \leq e$. (Interwał to gęsty łańcuch ograniczony od góry i od dołu). Zauważmy, że L jest maksymalnym łańcuchem w zbiorze $\{x \in W \mid c \leq x \leq e\}$. Rozważmy następnie interwał $L' := L/\{c\}$. Definicja 11 punkt (3) modelu BST gwarantuje, że L' ma infimum. Z konstrukcji mamy, że c jest ograniczeniem dolnym L' , a więc $c \leq \inf(L')$. Będziemy teraz argumentować, że istnieje nieporównywalne z c ograniczenie dolne L' , co pozwoli nam wydedukować sprzeczność.

Dla każdego $x \in L'$ rozważmy zbiór: $R_x = \{y \in ZW_{\min}/\{c\} \mid y \leq x\}$. Na mocy założenia $(\dagger)$ $R_x \neq \emptyset$ dla dowolnego $x \in L'$. Co więcej, dla $x, x' \in L'$, jeśli $x \leq x'$, to $R_x \subseteq R_{x'}$. Stąd

$$\bigcap_{x \in L'} R_x \neq \emptyset$$

(W przeciwnym razie, dla jakiegoś $x' \in L'$ byłoby $R_{x'} = \emptyset$ – sprzeczność z założeniem $(\dagger)$). Powyższe niepuste przecięcie oznacza, że istnieje c^* takie, że:

$$c^* \in ZW_{\min}/\{c\} \text{ i } \forall x \in L': c^* \leq x.$$

L' ma więc nieporównywalne ograniczenia dolne c i c^* . Stąd wynikają ostre nierówności: $c < \inf(L')$ i $c^* < \inf(L')$. Z gęstości porządku mamy: $\exists d: c < d < \inf(L')$. Wobec tego $L \cup \{d\} = L' \cup \{c\} \cup \{d\}$ jest łańcuchem w zbiorze $\{x \in W \mid c \leq x \leq e\}$, skąd wynika, że L nie jest maksymalnym łańcuchem w tym zbiorze. Sprzeczność. Wykazaliśmy więc, że w każdej historii h , do której należy $c \in ZW_{\min}$, jest jakieś zdarzenie e , które leży nad c i nie leży nad żadnym innym zdarzeniem wyboru należącym do $ZW_{\min}$.

Rozważmy więc e spełniające warunek powyżej. Zauważmy, że z drugiego punktu definicji modelu D-BST wynika, że istnieje jakieś zdarzenie wyboru zw^* w punkcie czasoprzestrzennym $[e]$. Oczywiście zw^* należy do jakiejś historii $h^* \in Hist$ i, ponieważ na mocy Faktu 25 $H_{(c)} = Hist$, $h^* \in H(c)$. Ponieważ punkty czasoprzestrzenne respektują porządek $\leq$ i e nie leży nad żadnym elementem $ZW_{\min}$ z wyjątkiem c , to zw^* też nie leży nad żadnym elementem $ZW_{\min}$ z wyjątkiem c . Wobec tego h^* spełnia WAR, a zatem zbiór historii spełniających ten warunek jest niepusty.

Rozważmy teraz jakiś element P podziału Π_c , do którego należy jakaś historia spełniająca WAR. Wybierzemy z P jedną z takich historii. Na mocy definicji modelu D-BST jest w niej tylko skończenie wiele zdarzeń wyboru, a więc zbiór zdarzeń wyboru w tej historii, które są nad c i nie nad żadnym innym zdarzeniem minimalnym, też jest skończony. Możemy zatem spośród tych zdarzeń wybrać zbiór minimalnych zdarzeń wyboru $Min_h(c)$. Te zdarzenia wyboru są nad c , ale nie nad żadnym innym zdarzeniem ze zbioru $ZW_{\min}$ i nie ma żadnego zdarzenia wyboru $zw: c < zw < d \in Min_h(c)$.

Twierdzimy teraz, że każdy $d \in Min_h(c)$ jest elementem każdej historii $h' \in P$. Gdyby był $d \in Min_h(c)$ oraz $h' \in P$ taka, że $d \notin h'$, wtedy istniałoby zdarzenie

wyboru powyżej c i poniżej d , gdzie h oraz h' by się rozdzielały; to jest niemożliwe, jako że $d \in \text{Min}_h(c)$. Możemy więc postawić: $\text{Min}_P(c) := \text{Min}_h(c)$ dla dowolnego $h \in P$ i rozumieć przez to ogół minimalnych zdarzeń wyboru w P , które leżą nad c , ale nie nad żadnym innym $c^* \in \text{ZW}_{\min}$.

Ostatecznie dla każdej $P \in \Pi_c$ bierzemy zbiór $\text{Min}_P(c)$ (dla pewnych, ale nie dla wszystkich, elementów podziału może być pusty). Z założenia nie wprost podział Π_c jest skończony, ponadto zbiór $\text{Min}_P(c)$ jest skończony dla każdego $P \in \Pi_c$. Zatem zbiór punktów czasoprzestrzennych, do których należy przynajmniej jeden $d \in \text{Min}_P(c)$ dla jakiegoś $P \in \Pi_c$, tworzy skończony zbiór częściowo uporządkowany. Jako taki posiada elementy minimalne. Wybieramy jakiś jeden minimalny punkt czasoprzestrzenny i jakieś zdarzenie wyboru d^* należące do tego punktu czasoprzestrzennego. Jako że porządek elementów w BST jest gęsty, istnieje element e^* taki, że $c < e^* < d^*$. Ponieważ d^* znajduje się w minimalnym punkcie czasoprzestrzennym, na pewno nie ma zdarzenia wyboru w punkcie czasoprzestrzennym $[e^*]$, co daje sprzeczność z warunkiem drugim definicji modelu D-BST.

□

VI. Dyskusja i konkluzje

Nasz pomysł rozwiązania konfliktu między realnymi możliwościami a modalną demokracją sformalizowaliśmy, definiując demokratyczne modele BT i BST. W takich modelach w każdej historii znajduje się skończenie wiele zdarzeń wyboru, ale też w każdej chwili/każdym punkcie czasoprzestrzennym w jakiejś historii znajduje się zdarzenie wyboru.

Zbadaliśmy, że modele demokratyczne mają dziwne własności. Każdy model D-BT ma element najmniejszy, który jest zdarzeniem wyboru i, co więcej, jeśli porządek w modelu jest gęsty, to w tym zdarzeniu otwartych jest nieskończenie wiele możliwości.

W modelach D-BST wprawdzie na ogół nie ma najmniejszego elementu, ale istnieje zawsze skończony zbiór minimalnych elementów, z których każdy jest zdarzeniem wyboru. Każde zdarzenie w modelu jest nad którymś z tych elementów minimalnych i, co więcej, w każdym istnieje nieskończenie wiele otwartych możliwości. Wyniki dotyczące BT i te dotyczące BST są podobne: wydaje się, że różnica między wynikiem „najmniejszy element” (BT) a wynikiem „zbiór minimalnych elementów” (BST) pochodzi z różnicy między maksymalnie przestrzennie dużym zdarzeniem w BT a punktowym zdarzeniem w BST.

Jak interpretować te wyniki? Wydaje się, że tylko taka interpretacja jest dopuszczalna: świat się kiedyś zaczął (Wielki Wybuch) i ten początek zlokalizowany był w skończonej liczbie punktowych zdarzeń. Co więcej, po tym początku ewolucja świata mogła pójść na nieskończenie wiele sposobów, z których urze-

czywistnił się jeden. Nasza konstrukcja chwil oraz punktów czasoprzestrzennych zapewnia, że przed Wielkim Wybuchem nie było czasu (BT) ani czasoprzestrzeni (BST). W przypadku BST przez „przed” należy rozumieć „nieleżące w górnym stożku świetlnym któregoś ze zdarzeń Wielkiego Wybuchu”.

Ironizując, jakież piękny i mocny wynik otrzymaliśmy! Niepokoi nas tylko, że otrzymaliśmy go zupełnie apriorycznie, bez inwestowania jakiegokolwiek wiedzy przyrodniczej. Radośnie ominęliśmy rafa takich zagadnień jak stosowalność teorii kwantowych do zjawisk grawitacyjnych, problemy z ogólną teorią względności, interpretacje zjawiska promieniowania szczątkowego oraz innych danych używanych przez kosmologów.

Myślimy więc, że (paradoksalnie) moc uzyskanych wyników świadczy przeciwko modelom demokratycznym, że takie modele to tylko matematyczne abstrakty, którym nic nie odpowiada w rzeczywistości materialnej. Przyjrzyjmy się co naprawdę zrobiliśmy: mieliśmy jakieś intuicje dotyczące realnych możliwości i modalnej demokracji, następnie mieliśmy pomysł, jak te pojęcia powiązać, sformułowaliśmy go na gruncie danej teorii i... wydedukowaliśmy Wielki Wybuch o dość szczególnych własnościach. Nasz Czytelniku, mamy nadzieję, że nie uwierzyłeś w Wielki Wybuch pod wpływem *naszego* dowodu! Ale dowód jest poprawny (mamy taką nadzieję). A to oznacza, że niepoprawne są jego przesłanki. Czyli, że nie należy postulować, aby zachodził lokalny determinizm (w każdej historii jedynie skończenie wiele zdarzeń indeterministycznych), ale w każdej chwili/każdym punkcie czasoprzestrzennym w jakiejś historii zachodziło jakieś indeterministyczne zdarzenie⁹.

Uważamy więc, że badany tu pomysł, jak rozwiązać konflikt między modalną demokracją a realnymi możliwościami, jest chybiony. Nie mamy oczywiście stu-procentowo pewnego argumentu, gdyż nasze dowody przedstawiliśmy na gruncie szczególnych teorii, BT i BST; nie wiemy, jak sprawa się przedstawia na gruncie innych teorii. Zauważmy jednak, że nie ma obecnie innych matematycznie precyzyjnych teorii możliwościowiatowych, które miałyby narzędzia potrzebne do wyrażenia analizowanego tu pomysłu na rozwiązanie konfliktu między realnymi możliwościami a modalną demokracją. W przyszłości zapewne powstaną teorie bogatsze od BT i BST, na przykład uwzględniające pewne wymogi ogólnej teorii względności. BST będzie jednak szczególnym przypadkiem takich teorii, dlatego wyniki otrzymane na gruncie BST będą musiały być w jakimś stopniu respektowane. Dlatego sądzymy, że nasz argument jest silny.

Jak więc rozwiązać konflikt, być może rzekomy, między realnymi możliwościami a modalną demokracją? Nie mamy argumentów, aby przyjąć takie czy inne rozwiązanie. Pozwolimy sobie jednak na koniec zasugerować taką oto wizję.

⁹ Być może dopuszczenie nieskończonej ilości zdarzeń wyboru w historii byłoby pewnym sposobem rozwiązania problemu, jednak stałoby się to kosztem utracenia bardzo klarownej interpretacji pojęcia lokalnego determinizmu.

W świecie zachodzą zdarzenia, zdarzenia mają lokalizację czasoprzestrzenną, niektóre zdarzenia mają wiele otwartych możliwości, a inne nie. Ani pośród zdarzeń, ani pośród chwil czy punktów czasoprzestrzennych nie ma modalnej demokracji. A więc nie wierz *a priori*, że chociaż teraz kończysz czytać ten artykuł, to to zdarzenie, Twoje kończenie lektury naszego artykułu, mogłoby rzeczywiście zajść godzinę wcześniej. Nie wierz też, że chociaż wskazana radioaktywna cząstka rozpadła się (zakładamy, że indeterministycznie) o danej godzinie, to było realnie możliwe zajście jakiegoś indeterministycznego zdarzenia kilka minut wcześniej. Przyjmij takie twierdzenia tylko wtedy, gdy dostaniesz argumenty za wspomnianymi realnymi możliwościami.

Ale, jak powiadają, światem rządzą prawa. Natura praw jest niezwykle trudnym zagadnieniem. Skłaniamy się ku opinii, że są to byty językowe, w takim przynajmniej sensie, jak w koncepcji Lewisa. To znaczy, są to aksjomaty należące do takiej aksjomatyzacji zupełnego opisu świata, która jest równocześnie najprostsza i najsilniejsza (tzn. maksymalizuje te dwie cechy równocześnie). Oczywiście, prawa zależą od tego, jaki jest świat: są przecież aksjomatami opisu świata. Z drugiej strony, zależą zapewne od języka, w którym robiony jest opis. Nie widać powodu, aby to, co najprostsze i najsilniejsze w opisie zrobionym w jednym języku, było najprostsze i najsilniejsze w opisie zrobionym w innym języku. Język natomiast wybieramy my, ludzie; dlatego sądzimy, że prawa przyrody (nie tylko ich sformułowanie w podręcznikach itp.) mają domieszkę czynnika ludzkiego. Co nie znaczy (jesteśmy dalecy od tego pomysłu), że konstruowanie praw przyrody jest arbitralne.

Jak się to ma do modalnej demokracji? Otóż myślimy, że i świat, i my – w jakimś stopniu konstruktorzy praw – działamy tak, aby prawa były modalnie demokratyczne, to znaczy, aby nie wyróżniały momentów czasu, punktów czasoprzestrzennych, kierunków, ogólnie: aby spełniały symetrie. Spełnianie symetrii gwarantuje, poprzez twierdzenie Noether, spełnienie zasad zachowania takich jak zachowanie energii, pędu itp. Wkład świata w modalną demokrację polega na tym, że spełnia takie, a nie inne zasady zachowania (jeśli spełnia). Gdy okazuje się, że wbrew naszym intuicjom pewnych zasad zachowania nie spełnia, to musimy się przyznać, że pomyliliśmy się, zakładając, że prawa spełniają odpowiednie symetrie. Taki przypadek zdarzył się za sprawą doświadczeń Wu i in. (1957), w których okazało się, że nie jest zachowana parzystość (to własność obiektów kwantowych, nie ma odpowiednika w fizyce klasycznej). Ta zasada zachowania skojarzona jest, przez twierdzenie Noether, z symetrią względem (lustrzanego) odbicia. Fizycy więc przyznali, że mieli wcześniej błędne sformułowanie praw rządzących oddziaływaniami słabymi, gdyż zakładali, że prawa te spełniają symetrie względem odbicia (Feynman i in., 1974).

Na czym natomiast miałby polegać ludzki wkład w wytwarzanie praw? Nie chodzi nam oczywiście o ludzki wkład w formułowanie praw przyrody: ten jest niewątpliwie i oczywisty. Sugerujemy mocniejszą tezę: to, jakie prawa przyrody są, jest w pewnym stopniu zależne od czynników ludzkich. Wydaje się, że jakiś

pobłask tego zjawiska widoczny jest wtedy, gdy mamy dwie matematycznie różne teorie, które są tak samo adekwatne empirycznie. Za przykład może posłużyć standardowa (hilbertowska) mechanika kwantowa i teoria kwantów Bohma-de Broglie. Wybierając język matematycznej teorii przestrzeni Hilberta (a nie język teorii Bohma-de Broglie), fizycy sprawili, że prawa przyrody są czymś chwytywanym przez pierwszą teorię, a nie przez drugą.

Jest to jednak temat na osobną i do tego obszerną pracę. Powróćmy do wniosków dotyczących głównego tematu artykułu. Pokazaliśmy, że wysoce nieintuicyjne konsekwencje ma koncepcja, zgodnie z którą świat jest lokalnie indeterministyczny, ale panuje w nim modalna demokracja, bo w każdej chwili/każdym punkcie czasoprzestrzennym zachodzi w jakiejś historii zdarzenie indeterministyczne. Sądzimy, że należy tę koncepcję odrzucić: nie ma modalnej demokracji wśród chwil/punktów czasoprzestrzennych. Skłaniamy się natomiast, aby uznać, że modalna demokracja dotyczy praw przyrody, przy czym te ostatnie uważamy za obiekty językowe.

Literatura

- Belnap N. (1992). „Branching space-time”. „Synthese” 92: 385–434. ‘Postprint’ w PhilSci Archive, <http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001003>.
- Belnap N., Perloff, M. i Xu, M. (2001). *Facing the Future*. Oxford University Press, Oxford.
- Brading K. and Castellani E. (2007). „Symmetries and invariances in classical physics”. W: J. Butterfield i J. Earman (eds.) *Philosophy of Physics*, s. 1331–1367. Elsevier, Amsterdam.
- Feynman R.P., Leighton R.B. i Sands M. (1974). *Feynmana wykłady z fizyki*, t. I cz. 2. PWN, Warszawa. (wydanie polskie).
- Lewis D. (1983). „New work for a theory of universals”. „Australasian Journal of Philosophy” 61: 343–377.
- Lewis D. (1986). *On the Plurality of Worlds*. Basil Blackwell, Oxford.
- Müller T. (2005). „Probability theory and causation: a Branching Space-Times analysis”. „British Journal for the Philosophy of Science” 56 (3): 487–520.
- Prior A. (1967). *Time and Modality*. Oxford University Press, Oxford.
- Thomason R.H. (1970). „Indeterminist time and truth-value gaps”. „Theoria” 36: 264–281.
- Wu C., Ambler E., Hayward R., Hoppes D., Hudson R. (1957). „Experimental test of parity conservation in beta decay”. „Physical Review” 105 (4).
- Xu M. (1997). „Causation in branching time: transitions, events, and causes”. „Synthese” 112: 137–192.

Real Possibilities and Modal Democracy

Key words: *modality, real possibility, democratic possibility, branching time, branching space-time*

At the outset two concepts of possibility are discussed, and the authors argue that they are conflicting. On the one hand we have ‘a real possibility,’ which assigns special status to some events, namely indeterministic events and on the other hand we have ‘a democratic possibility’ which allows for no privileged places, moments or occurrences. The authors assume that indeterminist events are relatively rare and combining this belief with the aforementioned distinction they argue that the two concepts of possibility refer to different aspects of the world, the real possibility refers to events in the world, the democratic possibility refers to space-temporal localization of events. This largely intuitive solution is analyzed for the ensuing consequences and expressed in a formal language that relies on the theories of branching time and branching space-time. It turns out that democratic models allowing for local indeterminism have particular and rather counter-intuitive properties.