

Krzysztof Wójtowicz

Filozofia matematyki Quine'a a kwantyfikatory Henkina i Boolosa

Słowa kluczowe: zobowiązania ontologiczne; kwantyfikacja rozgałęziona; kwantifikator Henkina; kwantifikator Boolosa; realizm matematyczny

Niniejszy artykuł poświęcony jest pewnym aspektom filozofii matematyki W.V.O. Quine'a. Ma on na celu – po przypomnieniu ogólnego schematu argumentacji Quine'a na rzecz matematycznego realizmu – postawienie pewnych pytań dotyczących zagadnienia zobowiązań ontologicznych w świetle problemu granic logiki (czyli problemu, jakie pojęcia można uznać za czysto logiczne). Posługując się przykładami kwantyfikatorów Henkina i Boolosa, chcę pokazać problem wymienności zobowiązań ontologicznych i założeń „ideologicznych”.

I. Quine: problem zobowiązań ontologicznych¹

Argument Quine'a na rzecz matematycznego realizmu jest w literaturze nazywany „argumentem z niezbędności” (*indispensability argument*). Punktem wyjścia jest konstatacja, że matematyka stanowi niezbędne narzędzie w naukach empirycznych. Quine całą naszą wiedzę – w tym naukę i filozofię – traktuje jako swoistą jednolitą sieć przekonań, w której nie ma wyraźnych granic pomiędzy poszczególnymi składowymi². Jego zdaniem, ogólne mechanizmy tworzenia się naszych przekonań są podobne w przypadku wiedzy potocznej, naukowej i filozoficznej.

¹ Jest to bardzo szkiecowe przypomnienie argumentacji Quine'a. Czytelnik zainteresowany szczegółową rekonstrukcją i dyskusją znajdzie ją np. w [Wójtowicz 2003].

² Quine akceptuje metafizologiczną tezę naturalizmu, w myśl której standardy argumentacji filozoficznej winny uwzględniać wyniki analiz naukowych (i metanaukowych), dotyczących naszej wiedzy (w szczególności wiedzy naukowej), odrzucając tezę o fundującym i uprzywilejowanym charakterze filozofii (por np. [Quine 1981, 49] czy [Quine 1960, 269]). Argumentacja filozoficzna winna więc mieć ścisły związek z analizami metanaukowymi (co nie znaczy oczywiście, że argumenty i problemy filozoficzne są unieważnione – jednak należy na nie patrzeć ze stosownej perspektywy).

Dla problemu statusu matematyki istotny jest fakt, że podczas formowania się naszych przekonań (zarówno zdroworozsądkowych, jak i naukowych) mamy do czynienia z mechanizmem postulowania przedmiotów. Uznajemy np., że istnieją zwykłe przedmioty fizyczne (takie jak stoły czy krzesła), ponieważ posługujemy się (niekoniecznie świadomie) mechanizmem reifikacji, który motywowany jest względami pragmatycznymi. Wiara w to, że nasze wrażenia zmysłowe pochodzą od stołów i krzeseł, niewątpliwie ułatwia nam stworzenie spójnego obrazu świata – i dlatego przyjmujemy fizykalistyczny, a nie fenomenalistyczny aparat pojęciowy³. Podobny mechanizm występuje w nauce: wprowadzamy założenia egzystencjalne dotyczące istnienia przedmiotów pewnego typu (np. elektronów), aby móc w efektywny sposób uporządkować dane doświadczenia. Można więc powiedzieć, że – w uzasadnionych przypadkach – rozbudowujemy naszą ontologię, aby uprościć opis świata. *Postulujemy* istnienie przedmiotów, aby wyjaśnić pewne zjawiska⁴. Fakt ten ma istotne znaczenie z punktu widzenia dyskusji dotyczącej problemu istnienia obiektów matematycznych.

Quine przyjmuje stanowisko holistyczne – w tym sensie, że za swoje jednostki sensu empirycznego uznaje nie poszczególne zdania danej teorii, ale całe teorie. Odrzuca tzw. empirystyczny dogmat redukcjonizmu, czyli „przekonanie, że każdemu zdaniu, czy też każdemu zdaniu syntetycznemu, odpowiada jednoznacznie określony zbiór możliwych zdarzeń zmysłowych, z których każde realizując się wzmacnia prawdopodobieństwo tego zdania, a także określony zbiór możliwych danych zmysłowych, których realizacja obniża to prawdopodobieństwo” [Quine 1953b, 63]. Ów dogmat leży u podłoża przekonania, że poszczególne zdania możemy niejako wyizolować z teorii naukowej i tak – w izolacji – je weryfikować lub obalać. Quine twierdzi natomiast, że „nasze twierdzenia o świecie zewnętrznym stają przed trybunałem doświadczenia zmysłowego nie indywidualnie, lecz zbiorowo” [Quine 1953b, 63]. A zatem – jeśli nadamy sens teorii empirycznej i uznamy ją za teorię zinterpretowaną – należy *wszystkim* zdaniom tej teorii przypisać podobny status.

Fakt ten ma istotne znaczenie z punktu widzenia interpretacji statusu matematyki. Quine dochodzi tu do wniosków radykalnie odmiennych niż neopozytywiści,

W świetle tej tezy jest jasne, że dla dyskusji problemu istnienia obiektów matematycznych podstawową rolę odgrywa rozpoznanie roli, jaką matematyka odgrywa w naukach empirycznych.

³ „Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu, ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest [...] podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatami maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata” [Quine 1953a, 31].

⁴ „Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące – nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane” [Quine 1953b, 67].

jak np. Carnap, który posługuje się klasycznym rozróżnieniem pytań dotyczących istnienia na tzw. pytania wewnętrzne i zewnętrzne⁵. Quine taki podział odrzuca. Jego zdaniem, jeśli w ramach pewnej teorii przyjmujemy pewne postulaty egzystencjalne, to winniśmy traktować je poważnie i interpretować wprost. Odrzuca wyjaśnienia w duchu instrumentalistycznym i twierdzi w szczególności, że fakt, że przedmioty są *postulowane* w ramach pewnej teorii, nie znaczy bynajmniej, że powinniśmy je traktować jako nierealne (czy – jakkolwiek to rozumieć – mniej realne)⁶. Dotyczy to zarówno przedmiotów obserwacyjnych (jak stoły czy kamienie), teoretycznych (jak geny czy elektrony), ale też przedmiotów matematycznych. Pytanie o istnienie obiektów matematycznych jest więc pytaniem tego samego typu co pytanie o istnienie stołów, kamieni, genów czy elektronów. Ostatecznie bowiem wszystkie te pytania dotyczą ontologii teorii, które konstruujemy, aby wyjaśnić dane empiryczne. Mamy oczywiście skłonność do postrzegania tych poszczególnych problemów jako różnych, ale wynika to jedynie z uwarunkowań o charakterze psychologicznym: łatwiej nam uwierzyć w istnienie kamieni niż w istnienie elektronów, a w istnienie tych ostatnich łatwiej niż w istnienie przestrzeni Hilberta⁷. Zdania mówiące o obiektach matematycznych nie różnią się jednak – co do zasady – od zdań mówiących o obiektach fizycznych. Wszystkie one stanowią fragment naszej przyjmowanej całościowo sieci przekonań i mają taki sam status⁸. Pytania o istnienie obiektów matematycznych są więc równie uprawnionymi pytaniami dotyczącymi ontologii danej teorii, jak np. pytania doty-

⁵ Pytania zewnętrzne dotyczą istnienia systemu bytów jako całości (np. liczb, obiektów matematycznych – ale też świata fizycznego). Zdaniem Carnapa, takie pytania są źle postawione. Jedyne sensowne pytania o istnienie to pytania stawiane *wewnątrz* danego systemu pojęć. Możemy np. sensownie zapytać, czy w myśl naszych teorii fizycznych istnieje metal o temperaturze topnienia 1500 stopni, ale nie ma sensu pytanie, czy *naprawdę*, w metafizycznym sensie, istnieją przedmioty fizyczne (w szczególności ów metal). Z samego faktu posługiwania się pewnym językiem nie wynikają żadne wnioski dotyczące istnienia desygnatów używanych terminów. Posługiwanie się takim, a nie innym systemem językowym wynika bowiem ze względów praktycznych i nie ma żadnych metafizycznych konsekwencji. W szczególności prawdy matematyczne – zdaniem logicznych pozytywistów – mają charakter analityczny, wynikając jedynie z przyjętych konwencji językowych (którym nie towarzyszą żadne egzystencjalne presupozycje). Akceptujemy oczywiście stwierdzenia typu „istnieją liczby pierwsze większe niż 100” – ale uznajemy je za czysto konwencjonalne prawdy, nie przypisując bynajmniej realności systemowi liczb jako całości.

⁶ „Wszystko to, czemu przypisujemy istnienie, jest przedmiotem postulowanym z punktu widzenia opisu procesu budowania teorii, a zarazem jest rzeczywiste z punktu widzenia samej tworzonej teorii” [Quine 1960, 37].

⁷ Wcześniej opanowujemy fragmenty języka dotyczące przedmiotów fizycznych i one dominują w naszej komunikacji – stąd bierze się nasze silne przekonanie, że przedmioty fizyczne „bardziej istnieją”. Jednak nie musimy brać pod uwagę tych mechanizmów psychologicznych przy analizach ontologicznych [Quine 1960, 267–268].

⁸ „W granicach nauk przyrodniczych istnieje continuum poziomów, od twierdzeń, które są sprawozdaniem z obserwacji, do tych, które wyrażają podstawowe idee, powiedzmy, teorii kwantów czy teorii względności. [...] twierdzenia ontologii, a nawet twierdzenia matematyki i logiki są kontynuacją tego continuum [...]. Różnice w tej dziedzinie są [...] jedynie różnicami stopnia, a nie

część istnienia pewnego typu bakterii czy cząstek elementarnych. Jeśli w myśl pewnej przyjmowanej przez nas teorii istnieją cząstki elementarne oraz liczby rzeczywiste, to należy uznać istnienie zarówno jednych, jak i drugich.

Jak jednak mamy stwierdzić, kiedy w myśl danej teorii istnieje przedmiot pewnego typu? Musimy tu zauważyć przede wszystkim, że pytanie o istnienie jest zawsze stawiane relatywnie do określonej teorii. Należy zatem pytać „Czy przedmiot P istnieje w myśl teorii T?”, a nie: „Czy przedmiot P istnieje *simpliciter*?”. Pytając o istnienie obiektu pewnego typu, pytamy w gruncie rzeczy o założenia egzystencjalne, jakie musimy przyjąć, aby móc zaakceptować daną teorię T. Dochodzimy więc do problemu identyfikacji ontologii dla danej teorii. Nie jest to problem banalny, biorąc pod uwagę fakt, że język naturalny jest zwodniczy, zaś nasz obraz świata leżący u podłoża naszych wypowiedzi – niezbyt dobrze określony⁹. W codziennej praktyce wprowadzamy jeszcze większy bałagan, mówiąc o różnych sensach czy stopniach istnienia (czasami twierdząc, że jest to tylko wygodny sposób mówienia, a czasami interpretując takie wypowiedzi dosłownie). Potrzebne jest więc klarowne kryterium, które pozwoli nam na stwierdzenie, co istnieje w myśl danej teorii – czyli jakie są jej zobowiązania ontologiczne¹⁰.

Quine twierdzi, że takie kryterium można sformułować tylko dla pewnej określonej klasy języków, w których mamy do czynienia z notacją „ontologicznie zdeterminowaną” [Quine 1986, 135]. Formułowanie kryterium istnienia ma bowiem sens jedynie wtedy, gdy w języku mamy kwantyfikację – gdyż to właśnie kwantyfikacja stanowi klucz do identyfikacji zobowiązań ontologicznych. Dopiero dzięki kwantyfikacji jesteśmy w stanie stwierdzić, jaki jest aparat referencjalny danej teorii i w jaki sposób następuje odnoszenie się do przedmiotów (czyli jakie przedmioty są postulowane w ramach danej teorii). Quine wyraża to lapidarnie w formie znanej formuły „istnieć to być wartością zmiennej” – za istniejące należy uznać te byty, które znajdują się w zakresie zmienności zmiennych (czy – mówiąc żargonowo – po których kwantyfikujemy).

Zdaniem Quine’a, problem identyfikacji ontologii jest dobrze postawiony tylko dla języka logiki elementarnej (czyli rachunku predykatów pierwszego rzędu). Posługiwanie się inną notacją może bowiem zafałszować obraz ontologii – zubożyć

rodzaju. Nauka jest strukturą jednolitą i w zasadzie ta struktura jako całość, nie zaś jej zdania składowe z osobna, jest tym, co doświadczenie potwierdza lub podważa” [Quine 1951, 171].

⁹ „Ontologia zwykłego człowieka jest niejasna i nieporządkna pod dwoma względami. Obejmuje ona wiele domniemyanych przedmiotów, które są niejasno lub nieadekwatnie określone. Ale, co ważniejsze, nie jest jasny jej zakres; nie sposób nawet ogólnie stwierdzić, które z tych niejasno określonych przedmiotów wolno w ogóle przypisać ontologii danego człowieka, co traktować jako rzeczy przez niego przyjmowane” [Quine 1981, 38].

¹⁰ Posługuję się terminem „zobowiązania ontologiczne”, choć bywa on przedmiotem krytyki (mówi się również o zaangażowaniach ontologicznych). Nie sądzę jednak, aby miało to prowadzić do nieporozumień.

go lub przeciwnie – sugerować istnienie przedmiotów, do których istnienia się *de facto* nie zobowiązujemy. Można więc powiedzieć, że kluczowe dla problemu identyfikacji ontologii jest ustalenie swoistej kanonicznej bazy, która pozwala na identyfikację formy logicznej zdań. Quine przyjmuje więc tezę o logice pierwszego rzędu, w myśl której to logika elementarna jest prawdziwą logiką, zaś wszelkie pojęcia wykraczające poza nią należy uznać za pozalogiczne. Aby „wyłuskać” zobowiązania ontologiczne musimy sprowadzić teorię do owej kanonicznej postaci. Koncepcja zobowiązań ontologicznych Quine'a wiąże się więc ściśle z pewnym rozumieniem tego, czym jest logika i jakie są jej granice.

II. Ontologia a ideologia

Podane przez Quine'a kryterium istnienia opiera się na pewnych założeniach, które można określić mianem „ideologicznych”. W szczególności opiera się na przyjęciu tezy o logice pierwszego rzędu (*first-order thesis*), w myśl której tylko logika elementarna (czyli – posługując się starszą terminologią – rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu) jest prawdziwą logiką. Dyskusja wokół problemu „granic logiczności” trwa od dawna (por. np. [Tharp 1975], [Barwise 1985], [Shapiro 1985, 1991], [Sher 1991], [Gomez-Torrente 2002])¹¹. Nie będę tej dyskusji podejmował, ograniczając się tu do wskazania dwóch przypadków ciekawych z punktu widzenia problemu zobowiązań ontologicznych: kwantyfikatora Henkina i kwantyfikatora Boolosa.

1. Kwantyfikator Henkina

Kwantyfikator Henkina (oznaczymy go Q_H) to najprostszy prefiks nieliniowy, wiążący cztery zmienne. Zdanie $Q_H x, y, x^*, y^* \varphi(x, y, x^*, y^*)$ odczytujemy intuicyjnie jako: „dla dowolnego x istnieje x^* i dla dowolnego y istnieje y^* *niezależnie od x oraz x^** takie, że $\varphi(x, y, x^*, y^*)$ ”¹². Standardowy przykład takiego zdania to tzw. zdanie Hintikki: „Pewien krewniak każdego wieśniaka i pewien krewniak

¹¹ Warto przypomnieć, że już w początkowej fazie formowania się teorii mnogości powstał problem, czy właściwa jest formalizacja w logice pierwszego czy drugiego rzędu. Za pierwszym rozwiązaniem opowiadał się np. Skolem, za drugim np. Zermelo.

¹² W literaturze spotyka się często „piętrowy” zapis, w którym w wyraźny sposób pokazujemy, że x^* zależy tylko od x , zaś y^* zależy tylko od y :

$$\forall x \exists x^*$$

$$\varphi(x, y, x^*, y^*)$$

$$\forall y \exists y^*$$

W artykule będę się posługiwał (ze względów praktycznych) zapisem $Q_H x, y, x^*, y^* \varphi(x, y, x^*, y^*)$.

każdego mieszczucha nienawidzą się nawzajem”. Tę zdania nie da się zapisać w postaci liniowej.

Formalna semantyka dla zdań z kwantyfikatorem Henkina zdefiniowana jest poprzez użycie pojęcia funkcji. Powyższe zdanie jest więc równoważne zdaniu „ $\exists F \exists G \forall x \forall y \varphi(x, y, F(x), G(y))$ ”, gdzie F, G są zmiennymi funkcyjnymi¹³.

Pojawia się naturalne pytanie o zobowiązania ontologiczne takich zdań. Po „przetłumaczeniu” na postać liniową mamy bowiem do czynienia z kwantyfikacją po funkcjach, podczas gdy w zapisie nieliniowym mówimy jedynie o indywiduach. Czy więc zdanie $Q_H x, y, x^*, y^* \varphi(x, y, x^*, y^*)$ niesie w sobie zobowiązania do istnienia funkcji, czy nie? Quine twierdzi zdecydowanie, że zdania z kwantyfikatorem Henkina zobowiązują się do istnienia funkcji. Wynika to – zdaniem Quine’a – stąd, że zobowiązania ontologiczne można zidentyfikować dopiero po sprowadzeniu zdania do postaci kanonicznej (a prawdziwa postać owego zdania to $\exists F \exists G \forall x \forall y \varphi(x, y, F(x), G(y))$). Ma to związek z jasnym ustaleniem przez Quine’a „granic logiczności”: tylko logika elementarna jest prawdziwą logiką. Systemy silniejsze zawierają składową pozalogiczną¹⁴.

Teza Quine’a jest tezą silną – i dyskusyjną¹⁵. Nie jest bynajmniej oczywiste, że zdanie z kwantyfikatorem Henkina należy faktycznie uznać jedynie za wariant notacyjny pewnej formuły, w której występuje kwantyfikacja po funkcjach (i która wyraża prawdziwą formę logiczną owego zdania). Intuicje, jakie kryją się za zdaniem $\exists F \exists G \forall x \forall y \varphi(x, y, F(x), G(y))$, można swobodnie wyrazić w sposób następujący: są pewne reguły (zależności) f oraz g , które dowolnym obiektom a, b z uniwersum *niezależnie od siebie* przypisują pewne obiekty $a^* = f(a)$ oraz $b^* = g(b)$ w taki sposób, że spełniona jest formuła $\varphi(a, a^*, b, b^*)$. Podkreśłmy, że reguły f, g są od siebie niezależne, zaś przyporządkowanie obiektu a^* obiektowi a jest niezależne od b (i symetrycznie: przypisanie obiektu b^* obiektowi b jest niezależne od a i a^*). Zamiast powiedzieć „ f przypisuje obiektowi a obiekt a^* ”,

¹³ Czyli zdanie $Q_H x, y, x^*, y^* \varphi(x, y, x^*, y^*)$ jest prawdziwe w danej strukturze relacyjnej M , jeśli istnieją funkcje $f, g: M \rightarrow M$ (prowadzące z uniwersum modelu w siebie) takie, że dla dowolnych $a, b \in M$, w M prawdziwe jest zdanie $\varphi(a, b, f(a), g(b))$.

¹⁴ W szczególności np. logika drugiego rzędu to „teoria mnogości w owczej skórze” i *de facto* nie zasługuje na miano logiki. Quine podkreśla, że ustalenie formy logicznej zdania jest kluczowe dla identyfikacji ontologii: „Przyjęcie dodatkowych elementów językowych może zniszczyć to ontologiczne kryterium. Załóżmy, na przykład, że ktoś przyjmuje *explicite* operator dla formowania domkniętych iteratów predykatów, zamiast definiować je na gruncie ontologii zbiorów. Czy wolno twierdzić, że ma bardziej oszczędną ontologię? Powiedziałbym raczej, że uchylił on problem ontologiczny, przechodząc do języka, który nie ma wyraźnej ontologii. Jego ontologia jest nieokreślona, a co najwyżej relatywna do pewnego uzgodnionego przekładu tej notacji na naszą, standardową notację” [Quine 1986, 134]. Zdaniem Quine’a, stosowanie kwantyfikatorów Henkina jest właśnie swoistym uchyleniem (czy raczej: zamazaniem) problemu zobowiązań ontologicznych.

¹⁵ Istnieje wiele poważnych argumentów na rzecz tezy o logice pierwszego rzędu, odwołujących się np. do metalogicznych własności logiki elementarnej (i innych systemów). Jednak trudno te argumenty uznać za konkluzywne, a dyskusję za rozstrzygniętą.

można powiedzieć (swobodnie) „dla każdego a istnieje a^* ” (i podobnie: zamiast powiedzieć „ g przypisuje obiektowi b obiekt b^* ”, można powiedzieć „dla każdego b istnieje b^* ”). Ostatecznie więc treść zdania $\exists F \exists G \forall x \forall y \varphi(x, y, F(x), G(y))$ można wyrazić swobodnie jako „dla każdego x istnieje x^* (zależne *tylko* od x), zaś dla każdego y istnieje y^* (zależne *tylko* od y), takie, że $\varphi(x, x^*, y, y^*)$ ”. Czy kiedy mówimy o zachodzeniu takich zależności, to faktycznie należy uznać, że zobowiązujemy się do istnienia funkcji jako bytów? Możemy sparafrazować zdanie z kwantyfikatorem Henkina jako zdanie o funkcjach, ale przecież taka parafraza może także być przeprowadzona w odwrotnym kierunku: możemy wyeliminować funkcje, wprowadzając kwantyfikację nieliniową. Czy z całą pewnością któraś z tych parafraz ma charakter uprzywilejowany? Można przecież postawić również tezę, że to zobowiązanie do istnienia funkcji jest jedynie swoistym artefaktem pewnej formalnej semantyki (właśnie odwołującej się do pojęcia funkcji) i bynajmniej nie tkwi w naszym naturalnym rozumieniu zwrotów z kwantyfikatorami rozgałęzionymi.

Jeśli kwantyfikację nieliniową uznamy za zrozumiałą *per se*, semantycznie pierwotną, to nie ma żadnego powodu, aby w zdaniach typu $Q_H x, y, x^*, y^* \varphi(x, y, x^*, y^*)$ dostrzegać zobowiązania ontologiczne do istnienia funkcji. Problem tkwi oczywiście w tym, czy uznamy, iż faktycznie kwantyfikacja rozgałęziona ma charakter autonomiczny, czy też należy ją uznać za (dziwaczny) sposób na tworzenie wariantów notacyjnych pewnych zdań w logice drugiego rzędu¹⁶.

Kluczowa jest więc decyzja, czy uznamy, że stwierdzenie, że „ x^* zależy tylko od x , zaś y^* zależy tylko od y ”, jest dostatecznie jasne samo w sobie, czy też w jego semantykę nieuchronnie zaangażowane jest pojęcie funkcji¹⁷. Analiza oparta na tradycyjnym, liniowym zapisie „wtłacza” interpretację takich wypowiedzi w schemat odwołujący się do istnienia funkcji. Uznanie takiej interpretacji za właściwą (czyli niejako ustalenie pewnego obowiązującego „kierunku parafrazowania” za właściwy) można uznać za założenie o charakterze „ideologicznym”.

Przypadek kwantyfikatora Henkina bardzo wyraźnie pokazuje swoistą „wymienność” założeń ontologicznych i „ideologicznych”. Dopuszczenie jako pierwotnych kwantyfikatorów Henkina pozwala na osłabienie założeń dotyczących

¹⁶ Nasuwa się tu skojarzenie z problemem reistycznych parafraz zdań, które *prima facie* angażują pojęcie własności (np. „ten człowiek jest okrutny” zamiast „tego człowieka cechuje okrucieństwo”). Reista nie ma wątpliwości, że prawdziwa forma logiczna wyrażona jest tym pierwszym zdaniem i to ono ukazuje zobowiązania ontologiczne. Jest to jednak założenie, które wyrasta z pewnych preteoretycznych intuicji – i bynajmniej nie jest bezdyskusyjne.

¹⁷ Innymi słowy: czy jesteśmy w stanie zrozumieć treść wyrażaną przez zdania z kwantyfikatorem Henkina wprost, nie myśląc o funkcjach prowadzących z uniwersum w uniwersum. Barwise twierdzi, że użycie funkcji Skolema pozwala nam doprecyzować intuicje, dotyczące tego, co znaczy, że x^* jest niezależne od y , zaś y^* jest niezależne od x [Barwise 1979]. Pojawia się tu pytanie, czy te intuicje wcześniej były całkiem niezrozumiałe, a precyzacja jest konieczna, aby w ogóle było wiadomo, o co chodzi?

ontologii. Używając kwantyfikatorów Henkina, możemy wyeliminować zobowiązania do istnienia funkcji w zdaniach typu $\exists F \exists G \forall x \forall y \phi(x, y, F(x), G(y))$ – poprzez dokonanie „nieliniowej parafrazy”¹⁸. Jeśli zaakceptujemy taką strategię, to naturalna staje się teza, że możemy posługiwać się także innymi kwantyfikatorami rozgałęzionymi, aby eliminować zobowiązania ontologiczne. Znane są bowiem wyniki techniczne, które pokazują identyczność siły wyrażeniowej pewnych fragmentów logiki drugiego rzędu i logik z kwantyfikatorami rozgałęzionymi. Jeśli zaakceptujemy taką strategię parafrazowania, będziemy mogli wyeliminować zobowiązania do istnienia zbiorów, wprowadzając prefiksy nieliniowe¹⁹.

2. Kwantyfikatory Boolosa

Problem o charakterze „ideologicznym” pojawia się także w przypadku kwantyfikatorów Boolosa (*plural quantifiers*). Boolos poddaje analizie zwrot „*There are...*”. W tradycyjnej analizie logicznej zdanie typu „Na parkingu są samochody” formalnie zapisujemy z użyciem zwykłej kwantyfikacji:

$$\exists x \exists y [P(x) \wedge P(y) \wedge S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y],$$

gdzie oczywiście $P(x)$ – x jest na parkingu; $S(x)$ – x jest samochodem.

Formalna parafraza w postaci zdania logiki elementarnej jest więc bardzo naturalna. Nie zawsze jest to jednak możliwe, co ilustruje klasyczne zdanie Geach-Kapłana „Pewni krytycy podziwiają tylko siebie nawzajem” (*Some critics admire only one another*). Nie jest bynajmniej oczywiste, jak należy zinterpretować to zdanie²⁰. Quine interpretuje je jako zdanie logiki drugiego rzędu: „Istnieje taki niepusty zbiór osób, że każdy człowiek z tego zbioru podziwia tylko kogoś innego z tego zbioru”²¹; symbolicznie:

$$\exists S(\exists x x \in S \wedge \forall u \forall v[(u \in S \wedge P(u, v) \rightarrow v \in S \wedge u \neq v)]).$$

¹⁸ Zdanie $\exists F \exists G \forall x \forall y \phi(x, F(x), y, G(y))$ przetłumaczmy na zdanie $Q_H x, y, x^*, y^* \phi(x, y, x^*, y^*)$ – a tutaj o żadnych funkcjach już nie ma mowy.

¹⁹ Wiadomo, iż każda formuła drugiego rzędu klasy postaci $\exists X \phi(X)$ (gdzie X jest zmienną zbiorową, zaś ϕ nie zawiera już kwantyfikatorów zbiorowych) jest semantycznie równoważna pewnej formule postaci $Q\psi$, gdzie Q jest pewnym kwantyfikatorem rozgałęzionym, zaś ψ jest pewną formułą elementarną. (Prezentację takich wyników Czytelnik znajdzie np. w [Mostowski 1994], [Krynicky, Mostowski 1995]).

²⁰ Boolos w pracy [Boolos 1984, 432–433] dowodzi, że zdanie to nie ma parafrazy w języku pierwszego rzędu: poprzez podanie stosownej interpretacji występującego w tym zdaniu dwuargumentowego predykatu (który w naturalnojęzykowej stylizacji interpretujemy np. jako „podziwia”) wykazuje, że przy tej interpretacji zdanie to charakteryzuje niestandardowe modele dla arytmetyki. Nie może być więc równoważne zdaniu logiki elementarnej.

²¹ Por. [Quine 1973, 111], [Quine 1982, 293].

Zmienna S jest tu zmienną zbiorową, w jawny sposób zakładamy więc istnienie pewnego zbioru.

Boolos proponuje zupełnie inne odczytanie tego zdania. Wprowadza dodatkowy operator $\exists x$, który należy odczytywać jako „są takie przedmioty x , że...”, oraz dodatkowy spójnik (oznaczę go tu jako „ $\angle$ ”). Wyrażenie „ $t \angle x$ ” odczytujemy jako „ t jest jednym z x -ów”

Analizowane zdanie zapisujemy wówczas jako:

$$\exists x x \{ \forall u (u \angle x \Rightarrow Cu) \wedge \forall u \forall v [(u \angle x \wedge P(u, v)) \Rightarrow (v \angle x \wedge u \neq v)] \}^{22}.$$

Należy tu podkreślić, że zmienne wiązane przez kwantyfikator $\exists x$ to zmienne indywiduowe (a nie zbiorowe czy funkcyjne), więc – w tym sensie – należy uznać ten kwantyfikator za kwantyfikator pierwszego rzędu.

Podobnie jak w przypadku kwantyfikatorów Henkina pojawia się problem, która parafraza zdania Geacha-Kapłana jest właściwa: tradycyjna, wprowadzając zmienne zbiorowe; czy też parafraza z użyciem kwantyfikacji Boolosa. Zwolennik tezy o logice pierwszego rzędu (np. Quine) uzna, że poprawna parafraza zakłada istnienie zbiorów, odrzucając kwantyfikację Boolosa.

Nie jest jednak oczywiste, że stwierdzenie „Są takie obiekty x , że...” należy traktować jako wariant notacyjny wyrażenia „jest taki zbiór x -ów, że...”. Zdaniem Boolosa, takie kwantyfikatory można uznać za absolutnie legalne środki semantyczne, którymi posługujemy się w języku naturalnym i rozumiemy je doskonale bez dokonywania dodatkowych parafraz. Nie ma wątpliwości co to tego, że zwroty typu „Są pewne przedmioty takie, że...” są dla nas intuicyjnie zrozumiałe. Zdaniem Boolosa, kwantyfikatory takie mogą być rozumiane wprost, bez odwołania się do pojęcia zbioru i angażowania semantyki opartej na pojęciu zbioru. Sytuacja jest podobna jak w przypadku kwantyfikatorów Henkina, kiedy pytamy o to, czy rozumiemy takie wypowiedzi wprost, czy jedynie poprzez odwołanie do pojęcia funkcji²³.

²² „Są takie obiekty, że jeśli u jest jednym z nich, to jest krytykiem, i dla dowolnych dwóch obiektów u, v , jeśli u jest jednym z nich i u podziwia v , to v jest jednym z nich (i v nie jest tożsamy z u).”

²³ Analizy Boolosa dotyczące alternatywnych, „nieteoriiomnogościowych” odczytań zdań tego typu motywowane są m.in. znanym przykładem definicji przodka podanym przez Fregego: „ x jest przodkiem $y \Leftrightarrow x$ jest elementem każdej klasy zawierającej y i domkniętej na operację dodawania rodziców”. W takim sformułowaniu odwołujemy się oczywiście do klas, jednak, zdaniem Boolosa, nienaturalne jest stwierdzenie, iż zrozumienie zdań dotyczących naszych przodków wymaga od nas uznania istnienia klas. W [Boolos 1985] pisze o tym, że pewien filozof zapytał go, czy faktycznie jest zobowiązany do uznania istnienia klas, ponieważ wierzy w to, że Napoleon nie był jego przodkiem? Zdaniem Boolosa, zwolennik analizy Fregego nie ma łatwej odpowiedzi na to pytanie.

Zwolennik tezy o logice pierwszego rzędu stwierdzi, że zdania zawierające kwantyfikatory Boolosa powinny być parafrazowane na zdania drugiego rzędu (z kwantyfikacją po zbiorach) – i dopiero taka parafraza pozwala na ustalenie, o czym tak naprawdę mowa w tych zdaniach. Z jego punktu widzenia kwantyfikator Boolosa nie ma bynajmniej autonomicznego charakteru, ale jest swoistym wariantem notacyjnym wyrażenia w logice drugiego rzędu²⁴. Jednak zgodnie z linią argumentacji Boolosa należałoby uznać, że skoro takie zwroty występują w języku naturalnym i traktujemy je jako nieproblematyczne, to w szczególności mamy prawo formułować ujmujące je formalizmy w sposób niezależny od teoriomnogościowych parafraz, traktując te pojęcia jako pierwotne²⁵. Użycie tych zwrotów jest całkowicie uprawnione i nie „przemycą” żadnych dodatkowych zobowiązań (w szczególności zobowiązań do zbiorów). Przy teoriomnogościowej parafrazie zdanie Geacha-Kapłana zobowiązuje się do istnienia *zbioru* krytyków, natomiast w myśl tezy uznającej kwantyfikator Boolosa za semantycznie pierwotny żadnych takich zobowiązań nie zaciągamy.

Taka decyzja prowadzi do ciekawych wniosków dotyczących zobowiązań ontologicznych w przypadku teorii matematycznych. Jeśli bowiem przyjmemy tezę o autonomiczności tych kwantyfikatorów, to wówczas zdecydowanie wzrasta siła wyrażeniowa tak zdefiniowanego języka dostępna *bez* zaciągania dodatkowych zobowiązań ontologicznych. Ciekawy przykład takiego zastosowania podaje Hellman. Zajmuje się m.in. problemem rekonstrukcji pewnych fragmentów matematyki w ramach teorii, która może zostać zaakceptowana z punktu widzenia nominalisty. Nie wnikając w szczegóły, Hellman twierdzi, że tak właśnie można zinterpretować arytmetykę liczb rzeczywistych RA^2 [Hellman 1989]. Ten sam problem analizuje w późniejszej pracy [Hellman 1996], odwołując się tam do koncepcji Boolosa, w szczególności zakładając semantyczną pierwotność tych kwantyfikatorów. Takie założenie pozwala na wzmocnienie siły wyrażeniowej, ponieważ wzbogacenie języka o kwantyfikator Boolosa pozwala wypowiadać zdania na temat *rodzin* zbiorów liczb rzeczywistych, utrzymując zobowiązania ontologiczne na poziomie samych tylko zbiorów liczb rzeczywistych²⁶.

²⁴ Np. Resnik twierdzi, że w kwantyfikację Boolosa jest niejako „wbudowane” pojęcie zbioru [Resnik 1988, 77].

²⁵ Nasuwa się tu skojarzenie z problemem, czy matematycy operujący pojęciami matematycznymi na poziomie intuicyjnym, na długo zanim została podana teoriomnogościowa rekonstrukcja, tak naprawdę (nieświadomie) mieli na myśli pewne zbiory...? Czy mówiąc o liczbach naturalnych, odnosili się (nieświadomie) do skończonych liczb porządkowych...? Teza taka jest co najmniej dyskusyjna. Jednak nieco podobny charakter ma teza, że osoba wygłaszająca (czy interpretująca) zdanie Geacha-Kapłana *tak naprawdę* myśli o pewnym zbiorze – i bez angażowania pojęcia zbioru nie byłaby w stanie takiego komunikatu wygłosić ani zrozumieć.

²⁶ Indywiduami są w tym przypadku zbiory liczb rzeczywistych. Zamiast zdania „Istnieje taka klasa zbiorów liczb rzeczywistych, że...” możemy użyć zdania z kwantyfikatorem Boolosa „Istnieje takie zbiory liczb rzeczywistych, że ...”. Tu nie pojawiają się zobowiązania do klas zbiorów.

Jeśli więc przyjmiemy tezę o „ontologicznej niewinności” kwantyfikatorów Boolosa, to należy uznać, że takie wzmocnienie siły wyrażeniowej nie prowadzi do nowych zobowiązań ontologicznych – pozostają one na poziomie RA^2 , choć siła wyrażeniowa języka wzrosła. Z punktu widzenia argumentu z niezbędności jest to istotne, ponieważ tak uzyskana teoria pozwala na rekonstrukcję znacznego fragmentu matematyki stosowanej.

III. Uwagi końcowe

Quine przyjmuje tezę matematycznego realizmu, która jest naturalną konsekwencją jego koncepcji zobowiązań ontologicznych. Identyfikacja tych zobowiązań jest możliwa dzięki przyjęciu pewnych założeń dotyczących kanonicznej notacji – zdaniem Quine'a, taką notacją jest notacja w postaci formuły rachunku predykatów. Ma to związek z przyjmowaną przez niego tezą, w myśl której to jedynie logika elementarna zasługuje na miano logiki.

Teza ta jest jednak dyskusyjna i coraz częściej kwestionowana. Jeśli dopuścimy bardziej liberalne rozumienie logiki, konieczne będzie znalezienie innego kryterium zobowiązań ontologicznych²⁷. Widać to dobrze na przykładzie kwantyfikatorów Boolosa czy Henkina – jeśli przyjmiemy tezę ich semantycznej autonomii, to prowadzi nas to do innych rozstrzygnięć dotyczących zobowiązań ontologicznych niż w przypadku zastosowania oryginalnego kryterium Quine'a. Decyzja, czy uznać autonomię takich kwantyfikatorów, ściśle się wiąże z naszym rozumieniem tego, czym są pojęcia logiczne. Widoczna jest więc wyraźnie zależność zobowiązań ontologicznych od przyjmowanych założeń dotyczących natury logiki, czyli swoista wymienność założeń ontologicznych i „ideologicznych”.

Bibliografia

- Barwise J. [1979], „On Branching Quantifiers in English”, „Journal of Philosophical Logic” 8, 47–80.
- Barwise J. [1985], „Model-theoretic logics: background and aims”, w: [Barwise, Feferman 1985], 3–23.
- Barwise J., Feferman S. (red.) [1985], *Model-theoretic logics*, Springer-Verlag.
- Boolos G. [1984], „To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)”, „Journal of Philosophy” 81, 430–50, (przedrukowane w [Boolos 1998]).
- Boolos G. [1985], „Nominalist Platonism”, „Philosophical Review” 94, 327–44, (przedrukowane w [Boolos 1998]).

²⁷ Propozycję takiego kryterium, opartego na technikach tzw. abstrakcyjnej teorii modeli (*abstract model theory*, por. np. [Barwise, Feferman 1985]) zawiera praca [Wójtowicz 2003].

- Boolos G. [1998], *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, MA, Harvard University Press.
- Gómez-Torrente M. [2002], „The Problem of Logical Constants”, „Bulletin of Symbolic Logic” 8, 1–37.
- Krynicki M., Mostowski M. [1995], „Henkin quantifiers”, w: Krynicki M., Mostowski M. (red.), *Quantifiers: Logics, Models and Computation, Vol I*, Kluwer Academic Publishers, s. 193–262.
- Mostowski M. [1994], „Kwantyfikatory rozgałęzione a problem formy logicznej”, w: *Nauka i język*, Pelc J. (red.), Warszawa, Wydawnictwa WFiS, 201–241.
- Quine W.V.O. [1951], „On Carnap’s Views on Ontology”, „Philosophical Studies”, 2, 65–72. Przekład polski: „O poglądach Carnapa na ontologię”, w: Stanosz B. (red.): *Empiryzm współczesny*, Warszawa, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1991, 163–172.
- Quine W.V.O. [1953a], „On what there is”, w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, 1–19. Przekład polski: „O tym, co istnieje”, w: *Z punktu widzenia logiki*, (tłum. B. Stanosz), Warszawa, PWN, 1969, 9–34.
- Quine W.V.O. [1953b], „Two Dogmas of Empiricism”, w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, s. 20–46, przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu”, w: *Z punktu widzenia logiki*, (tłum. B. Stanosz), Warszawa, PWN, 1969, 35–70.
- Quine W.V.O. [1960], *Word and Object*, MIT, tłumaczenie polskie: *Słowo i przedmiot*, tłum. C. Cieśliński, Aletheia, Warszawa, 1999.
- Quine W.V.O. [1973], *Roots of Reference*, La Salle, Ill., Open Court.
- Quine W.V.O. [1981], „Things and Their Place in Theories”, w: *Theories and Things*, Cambridge, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press, 1–23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach”, w: Szubka T. (red.): *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, TN KUL, 1995, 31–52.
- Quine W.V.O. [1982], *Methods of Logic*, 4th ed., Cambridge, MA, Harvard University Press.
- Quine W.V.O. [1986], *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.
- Resnik M. [1988], „Second-Order Logic Still Wild,” „Journal of Philosophy” 85, 75–87.
- Shapiro S. [1985], „Second-order languages and mathematical practice”, „Journal of Symbolic Logic” 50, 714–742.
- Shapiro S. [1991], *Foundations without foundationalism*, Clarendon Press, Oxford.
- Sher G. [1991], *The Bounds of Logic: a Generalized Viewpoint*. Cambridge, MA, MIT Press.
- Tharp L.H. [1975], „Which Logic Is the Right Logic?” „Synthese” 31, 1–21.
- Wójtowicz K. [2003], *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa.

W.V.O. Quine's Philosophy of Mathematics Confronted with Henkin and Boolos Quantifiers

Key Words: *ontological commitments, branched quantifiers, Henkin quantifier, Boolos quantifier, mathematical realism*

The article contains a brief presentation of Quine's arguments in favor of metamathematical realism and raises the problem of the dependence of ontological commitments of a theory on 'ideological' assumptions concerning the range of logical concepts. The problem is discussed by reference to Henkin and Boolos quantifiers. If these quantifiers are chosen and introduced as semantically primitive terms, fully understandable without recourse to set theoretical semantics and paraphrases presented as logical sentences with function variables and set variables, the resulting theory makes different ontological commitments from those that are made by Quine. The difference is illustrated by discussing a theory proposed by Hellman.