

Andrzej Biłat

Logika drugiego rzędu jako ontologia

Słowa kluczowe: logika drugiego rzędu, logika pierwszego rzędu, logika filozoficzna, ontologia, klasa, relacja

1. Argumentacja przedstawiona przez Quine'a w krótkim podrozdziale „Teoria mnogości w wilczej skórze” jego *Filozofii logiki*¹ otwiera pewien ważny etap w dyskusji na temat statusu logiki pierwszego (L1) i drugiego (L2) rzędu. Filozoficznym trzonem tej dyskusji jest kwestia, która z tych logik jest właściwą teorią kwantyfikacji. Jak wiadomo, Quine był zwolennikiem tezy o L1 (czyli tezy: logika = L1). Autor ten uchodzi – między innymi dzięki swojemu sugestywnemu stylowi argumentacji – za zdecydowanego i konsekwentnego obrońcę tej tezy. Jednakże uważna lektura wspomnianego fragmentu przekonuje, że jego stanowisko w tej kwestii było dość tolerancyjne: Quine zdaje się „podpowiadać” przeciwnikom tezy o L1 pewną dopuszczalną wersję L2.

Podobny, w gruncie rzeczy dość umiarkowany charakter często mają późniejsze głosy w dyskusji wokół tezy o L1. Z jednej strony, nawet zwolennicy tej tezy doceniają specyficzne zalety L2, takie jak semantyczna kategoryczność, skończona aksjomatyzowalność wielu ważnych teorii oraz wygoda w niektórych zastosowaniach (w szczególności w matematyce i teorii języka). Z drugiej strony, zwolennicy stosowania L2 nie kwestionują wyróżnionego statusu L1 jako podstawowego fragmentu L2 oraz przyznają, że L1 jest od wielu dziesięcioleci metalogicznym standardem ze względu na swoje liczne zalety, w szczególności semantyczną pełność i ontologiczną neutralność.

Zgódźmy się zatem, że oba typy systemów zasługują na miano logiki i spróbujmy opisać je przymiotnikami, które dobrze charakteryzowałyby ich statusy. Uwzględniając wspomniane cechy obu logik oraz uwagi, które za chwilę przed-

¹ Tenże, *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, 1973; polskie wydanie: *Filozofia logiki*, tłum. H. Mortimer, PWN, Warszawa 1977.

stawie, proponuję zachować dla L1 tytuł logiki formalnej, a dla L2 – ekstensjonalnej logiki filozoficznej.

W najbardziej filozoficznej części omawianej dyskusji – do której zasadniczo ograniczę się w tej pracy – kluczowa jest interpretacja faktu, że specyficznymi założeniami L2 są tezy o istnieniu klas. Według Quine'a założenia te sprawiają, że L2 znajduje się bliżej matematyki niż logiki: L2 jest matematyką (dokładniej: teorią mnogości) w przebraniu (dowcipniej: w owczej skórze).

Przemilczaną przesłanką tego rozumowania jest szeroka koncepcja matematyki. Wzięte dosłownie, rozumowanie to dotyczy raczej zaangażowania ontologicznego L2, a nie „zaangażowania matematycznego”. Przynajmniej od czasów Gottloba Fregego wiadomo, że droga od ogólnego twierdzenia o istnieniu klas do twierdzeń o charakterze typowo matematycznym nie jest ani krótka, ani prosta. Być może jako warunek demarkacji treści matematycznej powinniśmy uznać możliwość rekonstrukcji arytmetyki liczb naturalnych, jednakże takich środków L2 właśnie nie posiada. Zatem ostrożniejszą i dokładniejszą wersją argumentu Quine'a byłoby stwierdzenie, że L2 jest ontologią w przebraniu logiki formalnej.

Od czasu pierwszej publikacji *Filozofii logiki* upłynęło kilka dziesięcioleci, a mimo to systemy L2 są dziś najczęściej prezentowane jako rachunki logiczne z zakresu logiki formalnej, zbliżone bardziej do L1 niż do teorii mnogości. Przyjmując za Quinem, że takie ujęcie jest nieco zwodnicze, stajemy przed następującym wyborem: albo całkowicie odrzucić L2, albo przyjąć ontologiczną interpretację tej logiki. Quine wybrał pierwszą możliwość. W tym miejscu chcemy sprawdzić możliwość drugą.

To sprawdzenie będzie zasadniczo polegać na analizie zarzutów Quine'a, skierowanych przeciwko L2. Nasza myśl przewodnia jest następująca. Zrzucenie z L2 przebrania logiki formalnej polega na jej wyraźnym ujęciu jako logicznej (w znaczeniu ekstensjonalnej logiki filozoficznej) teorii przedmiotów i klas. W tym ujęciu jest to teoria elegancka i całkowicie ogólna. Nie dubluje też żadnej znanej teorii pierwszego rzędu (w szczególności jest słabsza od zwykłej teorii mnogości i nie zawiera arytmetyki). Nie widać żadnego istotnego powodu, dla którego mielibyśmy z niej rezygnować.

2. Większość rozważań, zawartych w punkcie „Teoria mnogości w owczej skórze”,² poświęcona jest zagadnieniu właściwej interpretacji monadycznych symboli predykatowych oraz właściwego zapisu formuł zawierających te symbole. Po dokonaniu krytyki podstawieniowej kwantyfikacji drugiego rzędu Quine dopuszcza możliwość przedmiotowej kwantyfikacji po zbiorach: „[...] jeśli ktoś chce przyjąć zbiory jako wartości zmiennych kwantyfikowanych, niech pisze $x \in y$, lub

² Tamże.

– jeśli woli inne zmienne dla zbiorów – $x \in \alpha$. Niech się odwoła wyraźnie do tego, co nazwałem [...] teoriomnogościowym odpowiednikiem”³. Jednocześnie przez „teoriomnogościowy odpowiednik” Quine rozumie „pewne zdanie otwarte teorii mnogości, które stworzymy ze schematu w następujący sposób. Zmieniamy zdania proste Fx , Fy , Gx itd. na zdania $x \in \alpha$, $y \in \alpha$, $x \in \beta$ itd., odwołując się w ten sposób do zmiennych α , β itd., których wartościami mają być zbiory”⁴.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by pisać, zgodnie z sugestią Quine’a, „ $x \in P$ ” zamiast „ $P(x)$ ”. Co więcej, ten zapis doskonale odzwierciedla teoriomodelowy warunek spełniania dla formuły prostej:

„ $x \in P$ ” jest spełniona wtw x^* należy do zbioru P^*

(gdzie x^* , P^* są wartościami zmiennych, odpowiednio, x i P w danym modelu, przy danym wartościowaniu). Z tego względu notacja typu „ $x \in P$ ” jest semantycznie bardziej przejrzysta niż standardowa notacja typu „ $P(x)$ ” (dotyczy to również języka $L1$). Tym samym bliższa jest idei notacji kanonicznej.⁵

Znak ekstensjonalnej predykcji „ $\in$ ”, używany w tym kontekście, jest stałą logiczną. Jest to dość zrozumiałe, uwzględniając choćby możliwość jego wprowadzenia za pomocą definicji tego typu:

$$x \in P \equiv P(x).$$

Z kolei od strony metalogicznej ustalenie to potwierdza kryterium Tarskiego-Mautnera (interpretacja tego symbolu, podobnie jak interpretacja zwykłego predykatu identyczności, jest niezmiennicza względem wszystkich permutacji dziedzin).

Ta „kanonizacja” monadycznego fragmentu $L2$ niejako oficjalnie czyni z niego logiczną teorię klas. W tej sytuacji większość zarzutów Quine’a, zawarta w omawianym punkcie, omija $L2$. Natomiast pozostaje do rozważenia argument innego typu, przedstawiony w ostatnim akapicie omawianego punktu.

3. Według Quine’a o tym, że treść ontologiczna jest w $L2$ niebezpiecznie zakamuflowana, ma rzekomo świadczyć następujący przykład. Centralnym postulatem teorii zbiorów jest schemat wyróżniania (aksjomat komprehensji), który w teorii mnogości jest w pewien sposób ograniczany w celu uniknięcia antynomii Russella. Odpowiednikiem tego postulatu w $L2$ jest według Quine’a formuła:

³ Tamże, s. 101.

⁴ Tamże, s. 78.

⁵ Również w takiej postaci $L2$ jest najczęściej stosowana we współczesnej matematyce. Pojęcie semantycznej przejrzystości języka zostanie dokładniej objaśnione w czwartym punkcie tej pracy.

$$(1) \quad \exists P \forall x (x \in P \equiv x \in Q).$$

Ta formuła daje się w prosty sposób wyprowadzić z trywialnego prawa logiki:

$$(2) \quad \forall x (x \in Q \equiv x \in Q).$$

W konsekwencji „niepewne założenia egzystencjalne teorii mnogości są teraz zręcznie ukryte w przemilczanym przejściu od schematycznych liter predykatowych do kwantyfikowanych zmiennych dla zbiorów”⁶.

Właściwa interpretacja tego argumentu nie jest sprawą prostą. Ściśle biorąc, formuła (1) nie jest odpowiednikiem aksjomatu wyróżniania naiwnej teorii mnogości. Jest nim – standardowo przyjmowany w L2 w roli aksjomatu – schemat:

$$(3) \quad \exists P \forall x (x \in P \equiv \alpha(x)), \text{ o ile zmienna } P \text{ nie jest wolna w formule } \alpha(x).$$

Schemat ten głosi, że dla każdego warunku zdaniowego istnieje klasa przedmiotów, które go spełniają. Postulat ten nie wynika w żaden prosty sposób z trywialnego prawa (2) (jest niezależnym aksjomatem L2).

W tej sytuacji trudno też zgodzić się z sugestią Quine’a, że (1) lub (3) prowadzi do trywializacji zagrożenia antynomią Russella. Schemat (3), użyty w konstrukcji teorii mnogości drugiego rzędu – notabene której zwolennikiem był Ernest Zermelo – prowadzi do pewnej wersji teorii klas (jako wartości zmiennych monadycznych) i zbiorów (jako wartości zmiennych nazwowych). Z kolei u podstaw tej teorii, jak wiadomo, leży ważna i często przyjmowana diagnoza wspomnianej antynomii, zgodnie z którą klasa Russella nie jest zbiorem.

Zatem omawiany argument Quine’a nie jest przekonujący. W szczególności interpretując monadyczną część L2 jako teorię klas, nie widzimy żadnych podstaw do kwestionowania przejrzystości jej założeń egzystencjalnych.

4. Ostatni z zarzutów Quine’a, zastosowany do relacyjnej części L2, może być analizowany podobnie (bierzemy wówczas pod uwagę wersję relacyjną schematu wyróżniania). Natomiast nieco bardziej złożona jest kwestia „ontologicznej czytelności” formuł prostych, w których występują predykaty relacyjne. Dla wygody, ograniczamy się do wersji L2 z dwoma typami predykatów, jednoargumentowych (monadycznych) i dwuargumentowych.

Złożoność tego problemu jest dobrze widoczna, gdy uwzględnimy zwykły warunek spełniania:

„ xRy ” jest spełniona wtw $\langle x^*, y^* \rangle$ należy do podzbioru R^* iloczynu kartezyjańskiego dziedziny.

⁶ Tamże, s. 102.

Odmienne niż w przypadku formuł prostych z predykatem monadycznym, w języku L2 nie ma synonimicznego wariantu formuły xRy , podobnego do prawej strony powyższej równoważności. Ta różnica nie jest przypadkowa: intuicyjne pojęcie relacji, związane z predykatem R , jest w metajęzyku eksplikowane jako zbiór par uporządkowanych. Warunek ten jest więc w istocie semantyczną wersją teoriomnogościowej definicji relacji. Z tego względu nie przechodzi następującego testu semantycznej przejrzystości, cechy charakterystycznej języka systemu logicznego w rozumieniu Quine'a:

System logiki jest systemem tautologii w sensie pewnej zamierzonej semantyki, której częścią jest rekurencyjna definicja spełniania, posiadająca następującą własność (zwaną tu semantyczną przejrzystością): równoważności, określające warunki spełniania dla poszczególnych typów formuł, wyrażają ogólną, intuicyjną treść tych formuł i odzwierciedlają ich strukturę, lecz nie są semantycznymi definicjami występujących w nich stałych ani użytych w nich pojęć.

Test semantycznej przejrzystości, będący częścią tego warunku, pozytywnie przechodzą na przykład równoważności w zwykłej definicji spełniania dla formuł klasycznego rachunku predykatów z identyficznością:

formuła „ $x = y$ ” jest spełniona wtw x^* jest identyficzny z y^* ,

formuła $\neg\alpha$ jest spełniona wtw nieprawda, że formuła α jest spełniona.

Prawe człony tych równoważności nie są (i nie mogą być, bez naruszania zasady unikania błędnego koła w definiowaniu) traktowane jako definiensy semantycznych definicji stałych (odpowiednio: „ $=$ ” i „ $\neg$ ”), występujących w formułach opisanych po lewej stronie równoważności. Człony te są jedynie semantycznymi przekładami tych formuł, w których są użyte pojęcia będące prostymi, metajęzykowymi odpowiednikami tych stałych (odpowiednio: „jest identyficzny”, „nieprawda, że”). Pojęcia te wiernie oddają zamierzony, intuicyjny sens tych stałych.

Z odmienną sytuacją mamy do czynienia w przypadku analizowanej równoważności. Poza tym, że może być ona użyta – i zwykle jest używana – w semantyce logicznej jako składnik definicji spełniania, może też pełnić funkcję semantycznej definicji relacji jako zbioru par uporządkowanych: jej prawy człon nie jest jedynie prostym, metajęzykowym przekładem formuły xRy , jest ponadto definiensem takiej definicji.

Ontologia wyrażona w języku, który nie jest semantycznie przejrzysty, nie jest dobrym narzędziem analizy ontologicznych zobowiązań uznawanych przez nas teorii. Używając terminologii Quine'a: język takiej ontologii, ponieważ wymaga dodatkowego objaśnienia, nie ma niezbędnych cech notacji kanonicznej. Często brak semantycznej przejrzystości wiąże się z przemycaniem ukrytych zobowiązań ontologicznych języka. Tak właśnie jest w analizowanym przykładzie: ukrytym zobowiązaniem ontologicznym formuły xRy jest teza o istnieniu par uporządkowanych.

5. Wobec powyższej trudności można przyjąć jedną z dwóch strategii. Pierwszą jest uznanie, że kategoria relacji, intuicyjnie przyjmowana w ontologicznej interpretacji L2, jest kategorią pierwotną, a jej teoriomnogościowa definicja ma charakter techniczno-formalny, dostarczając jedynie jej wygodnej reprezentacji. W tym ujęciu specyfiką L2 byłoby bycie teorią ekstensjonalnie pojętych relacji. W konsekwencji L2 dostarczałaby, konkurencyjnej względem teorii mnogości, ontologii relacji.

Wadą tego ujęcia jest groźba pewnej niespójności z przyjętym tu, quine'owskim podejściem: nie jest jasne, dlaczego akurat w przypadku formuł xRy , a nie innych, mielibyśmy prawo czynić wyjątek od zasady semantycznej przejrzystości. W celu uniknięcia tej niespójności należałoby zmodyfikować semantykę teoriomodelową, wprowadzając do niej kategorię relacji niebędących zbiorami. Jednakże w ten sposób wykroczylibyśmy zdecydowanie poza obszar zwykłej teorii mnogości w kierunku ontologii „intensjonalnych relacji”, nadbudowanej nad tą teorią. Podstawowym problemem takiej ontologii byłoby zagadnienie jednostkowienia (warunków identyczności) relacji.

Inna strategia polega na wprowadzeniu do języka L2 funkcyjnego symbolu pary uporządkowanej i potraktowaniu predykatów relacyjnych jako symboli klas, których elementami są takie pary. W tym ujęciu stosowny warunek spełniania miałby postać:

formuła „ $\langle x, y \rangle \in R$ ” jest spełniona wtw para uporządkowana $\langle x^*, y^* \rangle$ należy do podzbioru R^* iloczynu kartezjańskiego dziedziny.

Zaletą takiego ujęcia jest dostosowanie zasad ontologicznej interpretacji L2 do standardowej ontologii, związanej z paradygmatem teorii mnogości. W myśl tej oszczędnej ontologii relacje są pewnego typu klasami. W ujęciu tym unikamy trudności związanej z zagadnieniem jednostkowienia relacji. Zauważmy jednak, że wprowadzony do języka L2 symbol pary uporządkowanej nie miałby już charakteru stałej logicznej, co wyprowadzałoby nasze analizy poza system czysto logiczny.

Okazuje się, że użycie brzytwy Okhama i zasady prostoty, a więc środków charakterystycznych dla metodologii Quine'a, wskazuje na wybór drugiej strategii. Konsekwencją tej decyzji jest uznanie, że właściwą wersją L2, zasadniczo zgodną z ogólnymi założeniami filozofii logiki i metaontologii Quine'a (oczywiście poza tezą o L1), jest system ograniczony do zmiennych monadycznych.

6. Filozoficzna specyfika monadycznej L2 nie sprowadza się wyłącznie do bycia elegancką i ogólną teorią przedmiotów i klas. Warto podkreślić, że jest ona, w przeciwieństwie do analogicznych teorii pierwszego rzędu, teorią „czysto logiczną” (w znaczeniu ekstensjonalnej logiki filozoficznej). Dokładniej, wszystkie tezy L2 są prawdziwe w każdym modelu.

Jak wiadomo, pojęcia modelu dla L1 i L2 są zasadniczo (w ramach standardowej semantyki) takie same⁷. Może w takim razie pojawić się pytanie, jak wyjaśnić fakt, że dwie teorie o różnych zobowiązaniach ontologicznych są prawdziwe w dokładnie tych samych modelach (mianowicie – we wszystkich). Dlaczego różnica między tymi zobowiązaniami nie znajduje odzwierciedlenia w różnicy między zasięgami L1 i L2?

Zauważmy, że różnica między zobowiązaniami ontologicznymi może mieć odzwierciedlenie w różnicy zasięgów teorii jedynie w przypadku teorii formułowanych w ramach tej samej logiki, w szczególności – logiki tego samego rzędu. Rozważana tu sytuacja jest inna. Źródłem różnicy ontologicznych zobowiązań logik różnych rzędów nie jest różnica ich przedmiotów (zasięgów), lecz sposobów ich opisu, a dokładniej, większa siła ekspresji języka drugiego rzędu.

Okazuje się, wbrew znanemu powiedzeniu Quine'a, że zmiana logiki nie zawsze wiąże się ze zmianą przedmiotu, czasem jest tylko zmianą sposobu jego opisu. Standardowa semantyka dla logik różnych rzędów jest kontrprzykładem dla tej tezy.

Jak wiadomo (m.in. z semantyki dla kwantyfikatorów uogólnionych), języki o różnych siłach ekspresji „chwytają” różne cechy modelu. W szczególności niektóre modele mają pewne podstawowe cechy – skończoność, dobre uporządkowanie itd. – które nie są wyrażalne w języku L1, choć są wyrażalne w języku L2. Z ontologicznego punktu widzenia ta cecha L2 jest jej sporą zaletą. Jeśli bowiem model traktujemy jako semantyczną reprezentację fragmentu rzeczywistości, to musimy też przyjąć, że ważną rolę w tej reprezentacji odgrywają cechy całej dziedziny (np. jej skończoność lub nieskończoność) oraz cechy poszczególnych składników jej charakterystyki (np. porządkowanie dziedziny przez odpowiednie relacje).

Z punktu widzenia zwolennika tezy o L1 wspomniane cechy fragmentów rzeczywistości nie mogą być opisywane wprost – a więc w sposób właściwy dla ontologii – lecz co najwyżej pośrednio, na przykład w ramach semantyki (właśnie jako cechy modelu semantycznego). Zwolennik ontologicznej interpretacji L2 odrzuca to ograniczenie jako zbędny balast w poznawaniu podstawowych cech rzeczywistości, dzięki czemu zyskuje całkowicie ogólne i wygodne narzędzie jej opisu.

⁷ Modelem jest mianowicie układ $M = \langle D, R_1, \dots, R_n \rangle$, gdzie D jest niepustym zbiorem oraz R_i , dla $1 \leq i \leq n$, jest podzbiorem D lub podzbiorem dwu- bądź wielocłonowego iloczynu kartezjańskiego zbioru D (zbiór D nazywany jest dziedziną, a ciąg $R_1, \dots, R_n$ – charakterystyką modelu M). Przyporządkowanie modelu M językowi L1 polega zasadniczo na uznaniu, że zmienne nazwowe przebiegają D , a stałym predykatom odpowiadają wyróżnione w modelu podzbiory D lub relacje określone nad D . Przyporządkowanie modelu M językowi L2 jest podobne, z tą różnicą, że dziedzina funkcji wartościowania jest rozszerzona na zmienne predykatowe (wartościami zmiennych monadycznych są podzbiory D , a wartościami zmiennych relacyjnych – relacje nad D).

Second Order Logic as Ontology

Key Words: *second order logic, first order logic, philosophical logic, ontology, class, relation*

The article has been inspired by Quine's investigations of the status of the second order logic. Following his mentor, the author adopts an ontological interpretation of the second order logic as a logic that is a general theory of individuals, classes and relations. Here the dependence ends, however, as the author undertakes to defend a new, specific status of a theory of such kind, a different one from the status that was assigned to it by Quine in the usual interpretation of his arguments.