

R o m a n M u r a w s k i

Filozofia matematyki i logiki w lwowskiej szkole matematycznej*

Słowa kluczowe: matematyka, logika, nominalizm, realizm, istnienie obiektów matematyki

Naszym celem jest rozważenie filozofii matematyki i logiki w lwowskim środowisku matematycznym. Poddamy analizie poglądy Hugona Steinhausa (1887–1972), Stefana Banacha (1892–1945), Eustachego Żylińskiego (1889–1954) i Leona Chwistka (1884–1944). Obecność w tym kontekście trzech pierwszych uczonych nie budzi żadnych wątpliwości. Mogą one się natomiast pojawić w przypadku czwartego z nich. Otóż zaliczyliśmy Chwistka do lwowskiego środowiska matematycznego, ponieważ od roku 1930 piastował on katedrę logiki matematycznej na wydziale matematyczno-przyrodniczym Uniwersytetu Jana Kazimierza oraz ponieważ – mimo iż pewna część jego działalności naukowej miała miejsce w Krakowie – to we Lwowie właśnie rozwinął swoje koncepcje filozoficzne, a także tu starał się stworzyć szkołę.

Lwowska szkoła matematyczna – akceptując zasadnicze idee programu sformułowanego przez Zygmunta Janiszewskiego – specjalizowała się w innych dziedzinach matematyki niż szkoła warszawska. O ile w Warszawie zajmowano się głównie teorią mnogości, topologią i logiką matematyczną, o tyle we Lwowie dominowała analiza funkcjonalna zainicjowana przez Stefana Banacha (którego odkrył dla matematyki właśnie Steinhaus), a rozwijana m.in. przez Steinhausa, Stanisława Mazura, Władysława Orlicza, Juliusza Schaudera, Stefana Kaczmarza, Stanisława Ulama czy Władysława Nikliborca. Nie wymagała ona w takim stopniu, jak dziedziny uprawiane w Warszawie, pogłębionych

* Praca powstała w ramach programu badawczego Narodowego Centrum Nauki (grant N N101 136940).

studiów nad logiką i podstawami matematyki. Stąd w pracach matematyków lwowskich stosunkowo trudno znaleźć uwagi o matematyce jako takiej, w tym uwagi natury filozoficznej. Być może wpływ na to miał także fakt, że we Lwowie nie rozwijano logiki, choć przyznać trzeba, że klimat dla niej i dla podstaw matematyki był tam dobry. Dopiero w roku 1928 postanowiono utworzyć tu katedrę logiki matematycznej – objął ją w 1930 roku Leon Chwistek. Wcześniej jedynym właściwie matematykiem lwowskim, który zajmował się logiką matematyczną, był Eustachy Żyliński. Dodać jednak trzeba, że inni matematycy z tego środowiska nie dyskwalifikowali podstaw matematyki i logiki, a nawet „dorywczo” się nimi zajmowali – wspomnieć tu można choćby Banacha i jego *wspólną z Tarskim pracę o paradoksalnym rozkładzie kuli (1924)* czy *wyniki Banacha i Mazura na temat analizy obliczalnej i metod konstruktywnych w matematyce* (por. Mazur 1963).

1

Skoro mowa o Banachu, warto powiedzieć, że nie stronił on od udziału w życiu środowiska filozoficznego Lwowa i sporadycznie w nim uczestniczył. W szczególności Kazimierz Twardowski w swoim *Dzienniku* (1997) pisze, że Banach uczestniczył (7 marca 1921 roku) w inauguracyjnym posiedzeniu Sekcji Epistemologii Polskiego Towarzystwa Filozoficznego (por. Twardowski 1997, t. 1, s. 201) oraz że brał udział w wykładzie i zabierał głos w dyskusji po wykładzie Zygmunta Zawirskiego na temat relacji między logiką i matematyką, który wygłoszony został 26 marca 1927 roku na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Filozoficznego (tamże, s. 300). Na I Zjeździe Matematyków Polskich, który odbył się we Lwowie w roku 1927, Banach wygłosił (7 września 1927 roku) w sekcji logiki matematycznej referat *O pojęciu granicy* (tamże, s. 323). W styczniu 1923 roku Banach wygłosił też odczyt na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie. Poświęcony on był paradoksom w matematyce. Banach mówił o paradoksach związanych z pojęciem równoliczności pewnych zbiorów (na przykład zbioru liczb całkowitych i zbioru liczb parzystych) i o problemach mających związek z paradoksem Banacha-Tarskiego¹. Wskazywał, że przyczyną tych paradoksów są zbiory nieskończone oraz aksjomat wyboru, które formalnie nie są sprzeczne z teorią mnogości. Według Banacha rozwiązanie tych pozornych paradoksów wymaga skonstruowania systemu logicznego „nie wzbudzającego żadnych obiekcji”. Uwaga ta charakteryzuje w jakiś sposób postawę matematyków lwowskich w stosunku do logiki. Banach nie widział w szczególności niczego złego dla praktyki matematycznej w braku dobrego systemu logicznego. W szkole lwowskiej uprawianie matematyki nie musiało być uzupełnione dodatkowymi badaniami nad logiką i podstawami matematyki.

¹ Por. wspólną pracę Banacha i Tarskiego (1924).

2

Obraz matematyki, jaki żywiono we Lwowie, najlepiej daje się zrekonstruować w oparciu o pewne uwagi zawarte w pracach, których celem było popularyzowanie matematyki – w szczególności w pracach popularnych Steinhausa.

Rozważając poglądy filozoficzne Steinhausa na matematykę, powiedzieć musimy przede wszystkim o jego popularnej książce *Czem jest a czem nie jest matematyka* (1923). Mówi w niej o wielu kwestiach, w szczególności o definicji matematyki, o jej rozwoju historycznym, o zastosowaniach praktycznych, o metodzie matematyki, o rachunku różniczkowym i całkowym, o matematyce rachunkowej, o błędach w matematyce i o związkach matematyki z życiem. Z naszego punktu widzenia najbardziej interesujące są rozważania na temat określenia matematyki jako nauki i rozważania nad metodami matematycznymi.

Próbując zdefiniować matematykę jako naukę, Steinhaus podkreśla, że wyrosła ona z pewnych praktycznych potrzeb człowieka, ale jest w istocie nauką teoretyczną. Píše (Steinhaus 1923, s. 25):

Widzimy, że mamy tu do czynienia z nauką starą, rozwijającą się, wyrosłą na podłożu praktyki i związaną ze światem zastosowań realnych, ale nauką *teoretyczną* nie uchylającą się przed największymi wysiłkami nawet wtedy, gdy chodzi o zagadnienia zupełnie pozbawione utylitarnego charakteru, jak np. kwadratura koła.

Cechą charakterystyczną matematyki jest operowanie metodą dedukcyjną, przy czym „pewniki jej i definicje mają w dużej mierze cechę dowolności” (Steinhaus 1923, s. 25).

Inną cechą wyróżniającą matematykę już na pierwszy rzut oka jest posługiwanie się symbolami. Jest to z jednej strony konieczne, ale z drugiej może prowadzić do tzw. symbolomanii (por. pracę Twardowskiego *Symbolomania i pragmatofobia*, 1927) – czyli „manii mechanicznego operowania symbolami”, która „przeciwna jest psychologii matematycznej” (Steinhaus, 1923, s. 27).

Logikę traktuje Steinhaus wprawdzie z sympatią, ale nie jako samodzielną dyscyplinę, mającą własne problemy badawcze i własne metody, lecz jako narzędzie dedukcji. W takim właśnie charakterze pojawia się ona w omawianej książeczce, i to pojawia stosunkowo późno, bo dopiero w jej połowie, przy rozważaniu metody matematyki. Steinhaus tak ją charakteryzuje (tamże, s. 74):

Matematyka stawia sobie za cel wykrywanie teorematów absolutnie prawdziwych. Do tego celu używa metody zwanej *dedukcyjną*. Innymi słowy wysuwa ona z teorematów, co do których już upewniła się dostatecznie, nową drogą *logiczną*, tj. drogą poprawnego wnioskowania bez odwoływania się do obserwacji, do eksperymentu, do świadectwa zmysłów lub też oglądu przestrzennego, czy też do wizji, objawień albo autorytetu.

Metoda dedukcyjna wyznacza w jakimś sensie także przedmiot matematyki. Steinhaus pisze (tamże, s. 78):

Widzimy więc, że matematyka ma swój przedmiot określony tylko przez metodę i że jest matematyką każda teoria dedukcyjna, że jednak to określenie matematyki jest tylko ramą, która zostaje wypełniona dopiero po wprowadzeniu pewników matematycznych, a one są – do pewnego stopnia – dowolne.

I dodaje trochę dalej (tamże, s. 80):

Charakterystyczną cechą matematyki jest jej metoda. Metoda matematyczna jest dedukcyjna, syntetyczna i formalna.

Dedukcyjność metody matematyki polega na tym, że „jedynym środkiem, jakim posługuje się wywód matematyczny, jest dedukcja” (tamże, s. 80). Syntetyczność metody matematyki przejawia się, zdaniem Steinhaus, w doborze aksjomatów. Przy tym aksjomaty mogą być zarówno matematyczne, jak i logiczne. Dobór tych ostatnich „nie dokonuje się na drodze logicznej, lecz na mocy wyroku innej instancji, którą jedni nazywają «intuicją», inni «uczuciem pewności»” (tamże, s. 81).

Definicje służą w matematyce skracaniu wypowiedzi. Przy tym jednak „wybór definicji decyduje o tym, w jakim kierunku będziemy rozwijać matematykę, tj. które kombinacje symboli uznamy za ważne i godne osobnego skrótu” (tamże, s. 81).

Cecha formalności polega na tym, że w rozumowaniach matematycznych wolno uwzględniać tylko taką treść pojęć, która została zawarta w definicjach. Steinhaus pisze (tamże, s. 81):

Formalizm metody matematycznej polega na tym, że wyklucza się z rozumowań matematyki wszelką treść pojęć rozważanych o ile by ktoś chciał im przypisać jakąś treść pozadefinicyjną, a z definicji odrzuca się o ile możliwości wszystko, co mieści się w samym dźwięku wyrazów, a nie jest wyraźnie uwidocznione w umowie definicyjnej.

Utylitarny i „narzędziowy” tylko charakter logiki w stosunku do matematyki podkreśla zdanie Steinhaus (tamże, s. 169):

Nauka logiki formalnej znajduje w matematyce najpiękniejsze pole do ćwiczeń i przykładów.

Obok wspomnianych cech ważną rolę w rozwijaniu matematyki odgrywa także pierwiastek estetyczny². Według Steinhaus piękne jest „to, co jest zrozumiałe,

² Na problem ten zwracało uwagę wielu piszących o matematyce. Wspomnijmy tu tylko Arystotelesa, Proklosa czy Poincarégo. W szczególności Arystoteles w *Metafizyce* (ks. 3, 1078a 52 – 1078b 4) powiada, że matematyka mówi, choć niekoniecznie *explicite*, o pięknie i ujawnia elementy piękna, co więcej: piękno jest jedną z sił napędowych tej nauki. W podobnym duchu

co jest dostatecznie ogólne, żeby mogło stosować się do znanych, a nie *ad hoc* stworzonych przykładów, a zarazem nie jest tak ogólne, żeby było trywialne” (Steinhaus 1958, s. 43). Nie ma wprawdzie absolutnych kryteriów piękna, ale poczucie piękna i dążenie do niego „wpływają silniej na kierunek badań matematycznych niż zasada doskonałej ścisłości” (tamże, s. 44). W artykule *Drogi matematyki stosowanej* pisał (Steinhaus 1949, s. 11):

W duszy matematyka, jak każdego człowieka, tkwią różne wierzenia i zamiłowania, awersje i kultury, przesady i upodobania. Najsilniejszym z tych uczuć i najgodniejszym szacunku jest czułość na piękno matematyki. Nie każdy widzi piękno gór, nie każdy doznał wzruszenia na widok morza i nie do każdego przemawiają gwiazdy w nocy; tłumaczyć tego nie można, a jeszcze trudniej jest wyjaśnić, w czym tkwi piękno funkcji zmiennej zespolonej lub geometrii syntetycznej.

Steinhaus bardzo cenił matematykę stosowaną i zastosowania matematyki – sam zresztą z powodzeniem pracował w tej dziedzinie. Uważał, że podejście platońskie do matematyki przeszkadza w zainteresowaniu się i zajmowaniu zastosowaniami. W *Drogach matematyki stosowanej* pisał, że postawa ta „jest wroga nie tylko matematyce stosowanej, ale nawet niszczy wszystkie nauki przyrodnicze” (tamże, s. 11). Ponieważ nigdzie wyraźnie nie określił, jak rozumiał związek pojęć i obiektów matematyki z rzeczywistością poznawalną zmysłowo, zadowolić musimy się tu jego krótką, aforystyczną, ale jakże piękną i trafną uwagą (Steinhaus 1980, s. 54):

Miedzy duchem a materią pośredniczy matematyka¹.

O znaczeniu, jakie wiązał z matematyką, świadczy też następująca uwaga, pomieszczona w zakończeniu książeczki *Czem jest a czem nie jest matematyka* (Steinhaus 1923, s. 169):

Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego, jak matematyka. Możliwość udowodnienia każdego teorematu wyklucza wszelką frazeologię. W tej niezależności od frazesu, od autorytetu, w tej niezawisłości rezultatu od życzenia badacza i od „punktu widzenia”, upatruję nie tylko naukową, ale i pedagogiczną wartość tej nauki. Jeśli wolno użyć pojęcia „zdrowie umysłowe”, to matematyce przypada najdodatniejsza rola w „umysłowej higienie”.

wypowiadał się żyjący w V wieku n.e. filozof neoplatoński Proklos Diadochus w swoim *Komentarzu do pierwszej księgi „Elementów” Euklidesa*, czy działający w XIX wieku Henri Poincaré w *Science et méthode*.

¹ Zdanie to zostało wyryte także na nagrobku Steinhaus.

3

Mówiąc o filozofii matematyki i logiki w kontekście lwowskiej szkoły matematycznej, wspomnieć warto jeszcze – oprócz omówionych powyżej Steinhausa i Banacha – o Eustachym Żylińskim. Uprawiał on głównie teorię liczb, ale po roku 1919 zaczął zajmować się także algebrą, logiką i podstawami matematyki. W szczególności udowodnił (Żyliński 1925; zob. też 1927), że w klasycznej logice dwuwartościowej jedynymi funktorami zdaniowymi dwuargumentowymi, które same wystarczą do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów jedno- i dwuargumentowych, są binegacja i dysjunkcja (tzw. kreska Sheffera)⁴. Jeśli chodzi o kwestie związane z filozofią logiki i matematyki, to nie znajdujemy osobnych prac Żylińskiego poświęconych tym problemom. Napisał wprawdzie obszerną pracę *Formalizm Hilberta* (1935), ale – wbrew temu, co mógłby sugerować tytuł – nie ma w niej uwag filozoficznych związanych z programem Hilberta, a celem jej było (jak pisze we „Wstępie”) „opracowanie i szczegółowe przedstawienie pewnego formalizmu, na którym opierają się prace Hilberta i jego szkoły, dotyczące podstaw matematyki” (Żyliński 1935, s. 1). Koncentruje się więc autor na sprawach technicznych, skupiając się na teorii zbiorów i logice zdań. Zapowiada też „opracowanie rozszerzenia formalizmu H_1 obejmującego w swych zastosowaniach podstawy arytmetyki i matematyczne pojęcie funkcji” (tamże, s. 2). Praca ta jednak się nigdy nie ukazała. Warto przy okazji podkreślić, że wspomniane teorię zbiorów i logikę zdań autor pojmuje „jako samodzielne dyscypliny” (tamże).

W innych pracach Żylińskiego znajdujemy kilka krótkich wypowiedzi o charakterze filozoficznym. W sytuacji ubóstwa takich uwag warto tu zwrócić na nie uwagę. W autoreferacie z odczytu *O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej*, wygłoszonego 21 maja 1921 roku (Żyliński 1921–1922), mówił o tym, czym są teorie matematyczne. Twierdził, że można je utożsamiać ze zbiorem konsekwencji przyjętych aksjomatów. Czytamy tam (s. 71a–71b):

Poszczególne „teoria matematyczna” uważana być może za zbiór wniosków, które „mogą” być otrzymane za pomocą podstawowych pomysłów mnogościowych połączonych z uczuciem pewności, stosowanych do mnogości podstawowej, na której podmnogości nałożone są pewne własności początkowe (aksjomaty).

Uwagę zwraca dość nieprecyzyjne pojmowanie logiki, odwołujące się raczej do subiektywnego poczucia oczywistości i pewności, a nie do formalnie określonych z góry reguł inferencji. Żyliński dopuszcza też nieskończony zbiór

⁴ Dowód tego twierdzenia znaleźć można w książce Murawskiego i Świrydowicza *Podstawy logiki i teorii mnogości* (2006).

konsekwencji przyjętych aksjomatów, pisząc o wnioskach, które *mogą* być wyciągnięte.

Mówiąc o stosunku wzajemnym logiki i matematyki, stwierdza, że (tamże, s. 71b):

Z tego punktu widzenia stosunek matematyki do logiki zakresowej przedstawiałby się w pewnym stopniu jako stosunek specjalnych teorii mnogości do ogólnej.

Przyjmując, że pojęcie przedmiotu jest „najprostszym pojęciem przyrodniczym” (tamże), twierdzi, że matematyka jest nauką przyrodniczą o przedmiotach. Wzmacnia tę tezę podkreślając, iż „[w] badaniach poszczególnych teorii matematycznych (np. teoria liczb) posługujemy się obserwacją, a nawet doświadczeniem” (tamże, s. 71b).

W pracy *Z zagadnień matematyki*, cz. II, *O podstawach matematyki* (1928) mówił Żyliński o roli intuicji w matematyce. Podkreślał, że intuicja może pomagać skonstruować dowód, ale sam dowód nie może w żadnej mierze do intuicji się odwoływać. Pisał (Żyliński 1928, s. 51):

Intuicja w matematyce może z pożytkiem kierować dowodem, lecz w żadnym razie nie może być jego częścią składową.

Mamy więc tu wyraźne odróżnienie kontekstu odkrycia i kontekstu uzasadnienia – ten pierwszy dopuszcza intuicję, ten drugi natomiast nie.

W pracach Żylińskiego znajdujemy też kilka wypowiedzi na temat roli i znaczenia matematyki dla innych nauk i, szerzej, w świecie kultury. W autoreferacie *O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej* twierdził, że „ściśle syntetyczny wykład każdej nauki sprowadza się do pewnej teorii matematycznej, której twierdzenia mają moc obowiązującą w tej nauce” (Żyliński 1921–1922, s. 71b). W cytowanej wyżej pracy *O podstawach matematyki* pisał (Żyliński 1928, s. 42):

Narodziny matematyki są jednoczesne z narodzinami kultury ludzkości.

A dalej (tamże):

Wraz z rozwojem kultury intelektualnej geometria i arytmetyka, poza swym czysto praktycznym życiowym znaczeniem, zaczynają pociągać umysły dzięki wyjątkowo prostym i wyraźnym prawom występującym na ich terenie.

W memoriale Żylińskiego, Steinhausa, Ruziewicza i Banacha z 14 kwietnia 1924 roku czytamy zaś (Żyliński i in. 1924, s. 1):

Matematyka dzisiejsza jest niczym innym, jak ogólną teorią ścisłego myślenia połączonego z uczuciem pewności. [...] Będąc jednak najogólniejszą nauką o relacjach zachodzących między przedmiotami, matematyka znajduje zastosowania w każdej dziedzinie naukowej i praktycznej, wychodzącej w dostatecznej mierze poza ramy opisowości, prostych indukcji lub metod literacko-artystycznych.

Mamy więc tu wyraźne stwierdzenie dotyczące przedmiotu matematyki oraz – będące konsekwencją tego – wyjaśnienie stosowalności matematyki w innych dziedzinach.

4

Przejdźmy teraz do poglądów Leona Chwistka na filozofię matematyki i logiki. Pierwsze prace Chwistka dotyczyły psychologii eksperymentalnej – jest on jednak najbardziej znany ze swoich prac logicznych. Chwistek, podobnie jak i niektórzy inni logicy polscy (na przykład Leśniewski), w budowaniu i interpretacji teorii logicznych dawał wyraz swoim poglądom filozoficznym. Więcej, jego badania logiczne były w dużym stopniu motywowane jego poglądami filozoficznymi. Tworząc semantykę, chciał przezwyciężyć idealizm filozoficzny i występował przeciwko koncepcji prawdy absolutnej. Nie zadowalał się też (podobnie jak Leśniewski) rozwiązywaniem konkretnych problemów fragmentarycznych, ale dążył do stworzenia systemu obejmującego całokształt matematyki.

Zainteresowanie Chwistka logiką datuje się od czasu jego studiów w Getyndze, a zwłaszcza od wysłuchania odczytu Poincarégo na wiosnę 1909 roku. Chwistek postanowił połączyć idee Russella i Poincarégo i zreformować teorię typów logicznych przez pominięcie definicji niepredykatywnych. Punktem wyjścia jego badań logicznych była krytyka systemu rozgałęzionej teorii typów Whiteheada-Russella, wyłożonego w *Principia Mathematica* (1910–1913) – dotyczyła ona głównie zasady sprowadzalności, głoszącej, że dla każdej funkcji zdaniowej istnieje równoważna jej funkcja zdaniowa tego samego typu i rzędu „jeden” (tzn. bezkwantyfikatorowa). Pozwalało to na wyeliminowanie definicji niepredykatywnych. Zasada ta ma jednak charakter niekonstruktywny i przez to wprowadza – zdaniem Chwistka – przedmioty idealne. Stanowi ona typowy aksjomat istnienia – a według Chwistka w systemie dedukcyjnym nie powinno się przyjmować żadnych innych założeń jak tylko reguły sensu i reguły dedukcyjne.

Chwistek podjął więc zadanie przebudowy systemu Whiteheada-Russella – dokonał tego w duchu nominalistycznym. Sformułował pewną wersję prostej

(uproszczonej) teorii typów⁵. Jej podstawy sformułował Chwistek w pracach *Antynomie logiki formalnej* (1921), *Zasady czystej teorii typów* (1922) i *Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik* (1922). W prostej teorii typów rozróżnia się typy funkcji, ale rezygnuje z rozróżniania ich rzędów. Teoria ta pozwala na eliminację tylko antynomii logicznych (teoriomnogościowych) – podobnie jak czyniła to już rozgałęziona teoria typów Whiteheada-Russella – ale nie usuwa antynomii semantycznych w stylu antynomii Richarda. Chwistek sformułował więc następnie czystą teorię typów logicznych – teorię typów konstruktywnych (por. Chwistek 1924 i 1925). Polega ona m.in. na odrzuceniu aksjomatu sprowadzalności. Teoria ta prowadzi jednak do dużych komplikacji formalnych systemów logicznych (zwłaszcza teorii klas i teorii liczb kardynalnych), wynikających z konieczności brania pod uwagę nie tylko typów, ale i rzędów funkcji zdaniowych (których nie można teraz zredukować do rzędu najniższego). Usuwa więc obiekty niekonstruowalne kosztem zwiększenia stopnia formalnej komplikacji systemu.

Opisane badania prowadziły Chwistka dalej ku budowie pełnej teorii wyrażeń i w oparciu o nią metamatematyki racjonalnej. Miał to być system jeszcze bardziej podstawowy niż logika, który umożliwiłby rekonstrukcję klasycznego rachunku logicznego i całej Cantorowskiej teorii mnogości, oraz spełniałby założenia nominalistyczne, a zatem w szczególności był wolny od aksjomatów egzystencjalnych, głównie aksjomatu sprowadzalności i wyboru. System konstruowany przez Chwistka oparty był na założeniu, że jego twierdzenia, a zatem i twierdzenia rekonstruowanej w nim logiki klasycznej i teorii mnogości, odnoszą się jedynie do napisów, dających się otrzymać w skończonej liczbie kroków za pomocą ustalonej z góry reguły konstrukcji, a nie do tego, co te napisy oznaczają. Przy tym napisy rozumiane są jako przedmioty fizyczne. W trakcie realizacji swojego programu Chwistek zbliżył się do tej wersji nominalizmu, którą spotykamy we wcześniejszych pracach W.V.O. Quine'a i N. Goodmana.

⁵ Teoria ta nie dotarła do logików na świecie i została ponownie, niezależnie od Chwistka, sformułowana w roku 1925 przez F.P. Ramseya. O koncepcjach Chwistka wspominał z uznaniem B. Russell we wstępie do drugiego wydania *Principia Mathematica*. Zwrócił jednak równocześnie uwagę na koszty, jakie ona pociąga – sprowadzają się one do konieczności rezygnacji z wielu ważnych części matematyki. Pisał (Russell, Whitehead 1925–1927, t. I, s. xiv): „Dr Leon Chwistek [w swej *Theory of Constructive Types* – przypis Russella i Whiteheada] podjął heroiczny trud rezygnacji z tego aksjomatu [tzn. aksjomatu sprowadzalności – uwaga moja, R.M.] bez przyjmowania czegoś zastępczego; z jego pracy wynika jasno, że ten wybór zmusza nas do poświęcenia sporej części zwykłej matematyki” („Dr Leon Chwistek [*in his Theory of Constructive Types*] took the heroic course of dispensing with the axiom without adopting any substitute; from his work, it is clear that this course compels us to sacrifice a great deal of ordinary mathematics”). Por. też korespondencję między Chwistkiem a Russellem (Jadacki 1986).

Do nominalizmu Chwistka wrócimy jeszcze niżej. Teraz powiedzmy tylko, że jego koncepcje nie znalazły szerszego uznania i nie odegrały większej roli w rozwoju logiki. Przyczyn tego faktu dopatrywać się można w używaniu przez niego skomplikowanej, nieprzejrzystej i trudnej do odcyfrowania symboliki, jak i w niezbyt czytelnym i raczej niedbałym sposobie prezentacji wyników, w szczególności w braku odpowiednich przykładów, zwłaszcza w miejscach mogących budzić najpoważniejsze wątpliwości, które Chwistek zastępował zwrotami typu „łatwo widać, że...” – wszystko to utrudniało zrozumienie jego propozycji i ocenę ich wartości. Często było też w jego pracach powoływanie się na inne prace rozsiiane po różnych czasopismach i trudno dostępne. Jeszcze inną przeszkodą mógł być fakt, że swoje wyniki na terenie podstaw matematyki traktował Chwistek jako argument na rzecz swoich poglądów w rozmaitych kwestiach filozoficznych.

Pewne zainteresowanie pracami logicznymi Chwistka daje się zauważyć po roku 1945, gdy zwiększyło się zainteresowanie nominalizmem w filozofii matematyki⁶. Sam system metamatematyki racjonalnej nie został przez Chwistka dostatecznie szczegółowo rozpracowany. Nie mogli tego uczynić też jego współpracownicy (Jan Herzberg, Władysław Hetper czy Jan Skarżyński) ani uczniowie (Wolf Ascherdorf, Celina Gildner, Kamila Kopelman, Abraham Melamid, Józef Pepis czy Kamila Waltuch), gdyż wszyscy oni zginęli w czasie II wojny światowej. Chwistek chodził własnymi drogami, a jego badania logiczne nie mieściły się w głównym nurcie historycznego rozwoju logiki. Podobnie jak Leśniewski, pracował Chwistek w wąskim gronie nad własnymi koncepcjami bez współpracy na przykład z matematykami. Nie miał też ściślejszych kontaktów naukowych z filozofami lwowskimi.

Omówiwszy logiczne prace Chwistka, przejdźmy teraz do dokładniejszej prezentacji jego poglądów filozoficznych związanych z logiką i matematyką. Zwrócimy tu uwagę przede wszystkim na jego poglądy w zakresie metodologii nauk dedukcyjnych. Wyłożył je głównie w dziele *Granice nauki* (1935), zaopatrzonem w podtytuł „Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych”.

Według Chwistka wiedza ludzka nie jest ani pełna, ani absolutna. Nie może być pełna, ponieważ twierdzenia dotyczące ogółu obiektów prowadzą do sprzeczności. Nie może zaś być absolutna, gdyż nie ma jednej, absolutnej rzeczywistości. W *Granicach nauki* pisał (Chwistek 1935, s. 20; zob. też 1963, s. 17):

⁶ W latach 1950–1951 J.R. Myhill opublikował serię artykułów poświęconych zbadaniu możliwości wykorzystania systemów metamatematyki racjonalnej Chwistka do dowodu niesprzeczności teorii mnogości w wersji przedstawionej przez Bourbakistów. Por. Myhill (1950, 1951a, 1951b). Dodajmy też, że *Theory of Constructive Types* Chwistka została przedrukowana przez University of Michigan w serii „The Michigan Historical Reprint Series” – por. Chwistek 1988.

Z rozważań tych wynika, że zasada sprzeczności wyklucza wiedzę pełną, dającą odpowiedź na wszystkie pytania. Dążenie do takiej wiedzy musi – czy prędzej, czy później – doprowadzić do kolizji ze zdrowym rozsądkiem.

A zdrowy rozsądek jest według niego – obok uznania doświadczenia za podstawowe źródło wiedzy i konieczności schematyzacji poznawanych przedmiotów czy zjawisk – czynnikiem wspólnym wszelkiemu prawidłowemu procesowi poznawczemu. Polega on na odrzuceniu wszelkich założeń, które (1) nie dają się sprawdzić doświadczalnie lub (2) są niezgodne z doświadczeniem czy też (3) nie są oparte na niezawodnych stwierdzeniach dotyczących prostych faktów lub (4) nie dają się do takich stwierdzeń logicznie sprowadzić. Zarówno wiedza empiryczna, jak i dedukcyjna są relatywne. Ta pierwsza dlatego, że istnieją różne rodzaje doświadczenia, odpowiadające różnym rzeczywistościom, ta druga zaś z tego powodu, że zależy od przyjętego systemu pojęć. Chwistek mówi tu o relatywizmie racjonalnym.

Chwistek przyjmuje zasadę racjonalizmu poznania i zdecydowanie przeciwstawia się irracjonalizmowi. Racjonalizm polega na tym, że przyjmuje się tylko dwa źródła poznania, a mianowicie doświadczenie i ścisłe rozumowanie. Dotyczy to nie tylko matematyki i nauk ścisłych, ale także nauk empirycznych i filozofii. W *Granicach nauki* pisał (Chwistek 1935, s. V):

[...] punktem wyjścia budowy naszego poglądu na świat nie powinny być męty metafizyczne, ale prawdy proste i jasne, oparte na doświadczeniu i ścisłym rozumowaniu.

Przeciwstawia się więc irracjonalizmowi, metafizyce i idealizmowi w filozofii i matematyce⁷. Ostro krytykuje Platona, Hegla, Husserla, Bergsona. Widząc błędy pozytywizmu, dodatnio ocenia jednak jego koncepcje epistemologiczne. Dodajmy, że Chwistek bardzo wysoko cenił też materializm dialektyczny, nie dostrzegając zasadniczych przeciwieństw między nim a pozytywizmem. Swoje poglądy w zakresie poznania Chwistek określał mianem racjonalizmu krytycznego i przeciwstawiał go racjonalizmowi dogmatycznemu⁸.

Wyjściem z trudności, których źródłem jest irracjonalizm, i orężem w walce z nim ma być logika formalna, a zwłaszcza stworzona przez niego matematyka racjonalna. Chwistek zaczyna wstęp do *Granic nauki* zwrotem „Przeżywszy okres bezprzykładnego rozrostu irracjonalizmu” (tamże, s. III),

⁷ Chwistek odrzuca irracjonalizm i idealizm nie tylko jako błędne teorie filozoficzne, ale także dlatego, że są one, jego zdaniem, źródłem ludzkiego cierpienia, niesprawiedliwości społecznej, okrucieństwa i wojen.

⁸ Zwróćmy przy okazji uwagę na to, że pewną trudnością przy interpretowaniu poglądów Chwistka jest fakt, iż używa on często klasycznych terminów filozoficznych, ale nadaje im swoje znaczenie, którego zresztą w ogóle nie wyjaśnia lub też wyjaśnia w sposób niewystarczający.

a kończy słowami „Historia uczy, że ostateczne zwycięstwo było zawsze udziałem narodów opartych na zasadach ścisłego rozumowania” (s. XXIV). Píše też (s. XXIV):

Z chwilą, kiedy system ten [tzn. system metamatematyki racjonalnej – uwaga moja. R.M.] zostanie wykończony, będzie nam wolno twierdzić, że rozporządzamy niezawodnym aparatem, oddzielającym myślenie ścisłe od innych form myślenia.

Poglądy epistemologiczne Chwistka były bliskie neopozytywizmowi. Twierdził, że przedmiotem poznania naukowego może być jedynie to, co dane jest lub dane być może w doświadczeniu, a więc jedynie to, co widzimy czy spostrzegamy za pomocą zmysłów wspomaganych ewentualnie przez przyrządy. Pisał (Chwistek 1935, s. 229; zob. też 1963, s. 205):

[...] jeśli mówimy o rzeczywistości, to nie mamy na myśli jakiegoś idealnego obiektu, tylko te schematy, z jakimi w danym wypadku mamy do czynienia.

Zarówno w nauce, jak i w filozofii zalecał Chwistek stosowanie metody konstrukcyjnej. Wyłożył ją w pracy *Zastosowanie metody konstrukcyjnej do teorii poznania* (1923). Choć metoda ta może być w całej pełni stosowana głównie w naukach dedukcyjnych, to znajduje zastosowanie także w naukach empirycznych i w filozofii. U jej podstaw leży analiza pojęć intuicyjnych używanych w danej dyscyplinie. Pozwala na wyodrębnienie pojęć pierwotnych, których znaczenie scharakteryzowane jest w aksjomatach. Na bazie aksjomatów otrzymuje się teraz twierdzenia za pomocą praw logiki (formalnej). W późniejszym okresie Chwistek doszedł do wniosku, że konstruowanie systemów dedukcyjnych na gruncie filozofii jest bezcelowe – nie da się takiego systemu zbudować z powodu stopnia komplikacji badań filozoficznych.

Powiedzieliśmy wyżej, że według Chwistka przedmiotem poznania może być jedynie to, co dane jest w doświadczeniu. Mamy jednak do czynienia z różnymi rodzajami doświadczenia. W ten sposób dochodzimy do najbardziej znanej oryginalnej koncepcji filozoficznej Chwistka, a mianowicie do jego teorii wielości rzeczywistości⁹. Wyłożył ją po raz pierwszy w artykule *Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia* (1917), stwierdzając, że „intuicyjna wiara w jedną rzeczywistość wydaje mi się przesądem” (Chwistek 1917, s. 145) i dopatrując się pojęcia wielu rzeczywistości już u Pascala i Macha (tamże, s. 149–150). Rozwijał ją dalej w książce *Wielość rzeczywistości* (1921), a ostateczna jej wersja została ogłoszona w *Granicach nauki* (1935). Jej podstawy wyłożył jeszcze raz w przygotowywanej do wydania angielskiej wersji *Granic*

⁹ Teorię tę czasami porównuje się i zestawia z Poppera koncepcją trzech światów.

nauki, która ukazała się w roku 1948, a więc już po jego śmierci, ale wersja ta nie wnosi niczego nowego.

W pierwszym okresie Chwistek rozróżniał znaczenie pojęć „rzeczywistość” i „istnienie”. Według niego to ostatnie ma charakter ogólniejszy, ponieważ może dotyczyć nie tylko przedmiotów rzeczywistości, ale także przedmiotów abstrakcyjnych, takich jak przedmioty matematyki. Pisał (Chwistek 1917, s. 145):

Gdybyśmy założyli, że wszystko, co istnieje, jest rzeczywiste, to musielibyśmy uznać za rzeczywiste stosunki matematyczne wraz z elementami doświadczenia.

W *Trzech odczytach, odnoszących się do pojęcia istnienia* (1917) Chwistek wyróżnił trzy stanowiska w kwestii istnienia: nominalizm, realizm i hiperrealizm. Według niego nominaliści „żądadą określeń słownych, wykluczających sprzeczność” (Chwistek 1917, s. 126), realiści „obchodzą się bez określeń słownych, ale wykluczają przedmioty sprzeczne”, hiperrealiści zaś „obchodzą się bez określeń słownych i nie wykluczają przedmiotów sprzecznych”.

Początkowo Chwistek przyjmował tylko dwie rzeczywistości i próbował formalizować swoją teorię. W *Granicach nauki* rezygnuje z prób formalizacji i przyjmuje już cztery rodzaje rzeczywistości, odpowiednio do możliwych rodzajów doświadczenia. Mamy więc rzeczywistość wrażeń, rzeczywistość wyobrażeń, rzeczywistość rzeczy (rzeczywistość życia potocznego) i wreszcie rzeczywistość fizykalną (konstruowaną w naukach ścisłych). Poszczególnym rzeczywistościom przypisuje przy tym istnienie niezależne od siebie oraz pełne równouprawnienie teoretyczne.

Omówiwszy pokrótce ogólne koncepcje metodologiczne i ontologiczne Chwistka, przejdźmy teraz do jego poglądów bezpośrednio związanych z filozofią matematyki (choć już wcześniej zwracaliśmy uwagę na pewne jego poglądy związane z matematyką, a leżące u źródeł jego koncepcji logicznych). Z całą mocą dochodzą tu do głosu jego zdecydowane poglądy nominalistyczne.

Otóż według Chwistka przedmiotem nauk dedukcyjnych, a więc i matematyki, są wyrażenia konstruowane w tych naukach zgodnie z przyjętymi tam regułami konstrukcji. W konsekwencji przedmiotem matematyki nie są przedmioty idealne, takie jak na przykład punkty, proste, liczby czy zbiory. Przy tym wyrażenia będące przedmiotem matematyki są przedmiotami fizycznymi danymi nam w doświadczeniu. Mogą one być przekształcane zgodnie z przyjętymi regułami. W każdym danym systemie przyjmuje się takie reguły, jak również pewne wyrażenia, które odgrywają rolę aksjomatów i są podstawą, w oparciu o którą wyprowadzamy twierdzenia. Przy tym reguły przekształcania i aksjomaty dobiera się tak, by wyrażenia mogły być interpretowane jako opisy rozważanych stanów rzeczy. Aby móc stosować teorie dedukcyjne do nauk szcze-

gółowych i ogólniej do poznawania konkretnych dziedzin rzeczywistości, należy elementy tej ostatniej poddać schematyzacji.

Według Chwistka geometria jest nauką doświadczalną. W rozdziale VIII *Granic nauki* pisał (Chwistek 1935, s. 190; zob. też 1963, s. 170):

Geometria jest nauką doświadczalną. Polega ona na mierzeniu odcinków, kątów i powierzchni. Tak pojmowali ją Egipcjanie i taką pozostała w istocie swojej do dzisiaj. To, co uważa się powszechnie za geometrię za naszych czasów, tj. to, o czym pisze się w podręcznikach, jest osobliwą mieszaniną geometrii doświadczalnej i metafizyki geometrycznej, którą pozostawili nam w spadku Grecy pod postacią elementów Euklidesa.

Powstanie w XIX wieku systemów geometrii nieeuklidesowej Bolyai, Gaussa i Łobaczewskiego, które Chwistek uważa za najważniejsze dokonanie w dziedzinie nauk ścisłych, obaliło jego zdaniem kantowski idealizm¹⁰. Geometrie te pokazały, że na przykład pojęcie prostej nie ma charakteru obiektywnego, ale zależy od przyjętych aksjomatów. To może sugerować, że właściwą filozofią jest dla geometrii konwencjonalizm. Istotnie, w pierwszych swych pracach, na przykład w cytowanym już artykule *Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia* (1917), stwierdza wyraźnie, że istnienie systemów geometrii nieeuklidesowej, które są wewnętrznie niesprzeczne, obala tezę o apriorycznym charakterze geometrii. Wydaje się, że byłby też skłonny zaakceptować konwencjonalizm, choć wyraźnie tego nie stwierdza. Pisał (Chwistek 1917, s. 144–145):

Obydwa systemy [tzn. system geometrii euklidesowej i systemy geometrii nieeuklidesowej – uwaga moja, R.M.] są wolne od sprzeczności, można je bowiem sprowadzić do geometrii analitycznej, nie wykazują więc zasadniczych różnic z punktu widzenia teoretycznego. Intuicja godzi się z łatwością z twierdzeniami Łobaczewskiego, które tylko na pierwszy rzut oka wydają się paradoksalne [...]. Dochodzimy więc do wniosku, że obydwie geometrie są w równym stopniu prawdziwe, każda z nich bowiem odnosi się do innych linii prostych: tylko różnice pomiędzy obydwooma gatunkami tych linii prostych nie dadzą się uchwycić przy pomocy środków doświadczalnych ani intuicyjnych, tak że kawałek linii prostej, który narysujemy lub pomyślimy sobie, może służyć za ilustrację jednego lub drugiego gatunku zależnie od naszej woli.

¹⁰ Teza, że geometrie nieeuklidesowe obaliły kantowską filozofię geometrii, wydaje się nie do końca prawdziwa. Otóż jeśli uwzględnić, że Kant rozróżniał postulowanie istnienia obiektu i jego konstrukcję, teza ta upada. Postulowanie istnienia wymaga bowiem tylko wewnętrznej niesprzeczności danego pojęcia, a konstrukcja zakłada pewną strukturę przestrzeni percepcyjnej. Tak więc można postulować istnienie sfery 5-wymiarowej, bo pojęcie to jest wewnętrznie niesprzeczne, ale nie można jej skonstruować, gdyż przestrzeń percepcyjna jest 3-wymiarowa. Kant nie twierdził niczego, co przeczyłoby możliwości zbudowania wewnętrznie niesprzecznych systemów geometrii innych niż geometria euklidesowa.

W *Granicach nauki* jednak Chwistek wyraźnie i kategorycznie odrzucił konwencjonalizm, twierdząc, że geometrię – podobnie jak i wszystkie inne podstawowe nauki doświadczalne – należy oprzeć na teorii wyrażań. Konwencjonalizm bowiem wprowadza twory hipotetyczne – jak to było już u J.S. Milla czy potem u propagatora tego kierunku, tzn. u Poincarégo¹¹. Pisał (Chwistek 1935, s. 186–187):

Okazuje się, że dotarcie do ogólnego pojęcia geometrii bez formuł jest niemożliwe. Jasne jest, że idąc tą drogą, musimy dojść do unicestwienia geometrii jako nauki o idealnych utworach przestrzennych. [...] Żeby mówić o różnych czterowymiarowych czasoprzestrzeniach, musimy się odwołać do czasoprzestrzeni pięciowymiarowej. Jest jasne, że wszystko to ma tyle sensu, ile zawierają go formuły matematyczne.

Podobnie jak geometrię traktować należy, zdaniem Chwistka, również arytmetykę, analizę matematyczną i inne teorie matematyczne, uzyskując w ten sposób konsekwentnie nominalistyczne ich interpretacje.

Los koncepcji filozoficznych Chwistka był podobny do losu jego koncepcji logicznych (o czym mówiliśmy wyżej). Chwistek kroczył samotnie własnymi drogami. Jego pomysły spotykały się często z ostrą krytyką – jak sam pisał w *Zagadnieniach kultury duchowej w Polsce* (Chwistek 1933; por. 1961, s. 203):

sfery zawodowych filozofów zareagowały na ideę wielości rzeczywistości już to jej lekceważeniem, już to bezprzykładnym oburzeniem, graniczącym z dziką wściekłością.

Jakie były przyczyny takich reakcji? Otóż badania filozoficzne Chwistka nie miały charakteru systematycznego i wydaje się, że nie były przez niego traktowane z pełnym poczuciem odpowiedzialności (jak pisze E. Pasenkiewicz w „Przedmowie” do wyboru dzieł Chwistka – por. Chwistek 1961, s. VII). Nie wyjaśnił wielu używanych przez siebie terminów, jego koncepcje „wcześniej były ogłaszane niż sprawdzone” (tamże).

5

Przedstawione poglądy matematyków i logików związanych ze lwowskim środowiskiem matematycznym pokazują, że – z wyjątkiem Chwistka – nie sfor-

¹¹ Dodajmy tu, że według Chwistka konwencjonalizm stał się też źródłem reakcyjnych poglądów społecznych, sprowadzając prawdę i prawdziwość do skuteczności i prowadząc w rezultacie do wzmocnienia pozycji klas panujących. Pisał (Chwistek 1935, s. 186): „Jest dobrze zauważyć, że idealizm ubrany w piórka konwencjonalizmu stał się jeszcze bardziej niebezpiecznym narzędziem w rękach elementów reakcyjnych od starego dogmatycznego idealizmu”.

mułowano tu żadnej całościowej i jednolitej koncepcji filozoficznej dotyczącej matematyki i logiki. Mamy do czynienia jedynie z luźnymi, oderwanymi uwagami, formułowanymi przy okazji innych zagadnień i będącymi właściwie wyrazem refleksji nad własną pracą badawczą w matematyce. Jedynie Chwistek, który zresztą nie był właściwie matematykiem, a logikiem (matematycznym), próbował stworzyć pewną całościową koncepcję. Cechą dominującą jego koncepcji jest przede wszystkim nominalizm ze wszystkimi tego konsekwencjami. Niestety styl pracy Chwistka nie pozwolił mu na dopracowanie szczegółów.

Bibliografia

- Banach, S.; Tarski A. (1924), *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, „Fundamenta Mathematicae” 6, s. 244–277.
- Chwistek, L. (1917), *Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia*, „Przegląd Filozoficzny” 20, s. 122–151; przedruk w: Chwistek 1961, s. 3–29.
- Chwistek, L. (1919), *W kwestii zdań „pozbawionych treści” (Z powodu polemiki o definicję wielkości)*, „Przegląd Filozoficzny” 22, s. 110–111.
- Chwistek, L. (1921a), *Antynomie logiki formalnej*, „Przegląd Filozoficzny” 24, s. 164–171; przedruk w: Chwistek 1963, s. 249–255.
- Chwistek, L. (1921b), *Wielość rzeczywistości*, Kraków; przedruk w: Chwistek 1961, s. 30–105.
- Chwistek, L. (1922a), *Zasady czystej teorii typów*, „Przegląd Filozoficzny” 25, s. 359–391; przedruk w: Chwistek 1963, s. 256–285.
- Chwistek, L. (1922b), *Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik*, „Mathematische Zeitschrift” 14, s. 236–243.
- Chwistek, L. (1923), *Zastosowanie metody konstrukcyjnej do teorii poznania*, „Przegląd Filozoficzny” 26, s. 175–187.
- Chwistek, L. (1924), *The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics)*, Part I: *General Principles of Logic: Theory of Classes and Relations*, „Annales de la Société Polonaise de Mathématique” 2, s. 9–48.
- Chwistek, L. (1925), *The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics)*, Part II: *Cardinal Arithmetic*, „Annales de la Société Polonaise de Mathématique” 3, s. 92–141.
- Chwistek, L. (1933), *Zagadnienia kultury duchowej w Polsce*, Warszawa; przedruk w: Chwistek 1961, s. 149–277.
- Chwistek, L. (1935), *Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*, Książnica-Atlas, Lwów–Warszawa; przedruk w: Chwistek 1963, s. 1–232.
- Chwistek, L. (1948), *The Limits of Science. Outline of Logic and of the Methodology of the Exact Sciences*, translated by Helen Charlotte Brodie and

- Arthur P. Coleman, Kegan Paul, Trench Trubner & Co Ltd, New York–London, reprinted by Routledge, London 2000.
- Chwistek, L. (1961), *Pisma filozoficzne i logiczne*, t. I, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Chwistek, L. (1963), *Pisma filozoficzne i logiczne*, t. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Chwistek, L. (1988), *The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics)*, University of Michigan, University Library, Ann Arbor.
- Jadacki, J.J. (1986), *Leon Chwistek – Bertrand Russell's Scientific Correspondence*, „Dialectics and Humanism” 13, s. 239–263.
- Maligranda, L. (2009), *Eustachy Żyliński (1889–1954)*, „Antiquitates Mathematicae” 3, s. 171–211.
- Mazur, S. (1963), *Computable Analysis*, „Rozprawy Matematyczne” 33.
- Murawski, R. (2011), *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*, Monografie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Murawski, R.; Świrydowicz K. (2006), *Podstawy logiki i teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.
- Myhill, J.R. (1950), *A Complete Theory of Natural, Rational and Real Numbers*, „The Journal of Symbolic Logic” 15, s. 185–196.
- Myhill, J.R., (1951a), *Report on Investigations Concerning the Consistency of the Axiom of Reducibility*, „The Journal of Symbolic Logic” 16, s. 35–42.
- Myhill, J.R. (1951b), *Towards a Consistent Set Theory*, „The Journal of Symbolic Logic” 16, s. 130–136.
- Steinhaus, H. (1923), *Czem jest a czem nie jest matematyka*, Księgarnia Nakładowa H. Altenberga, Lwów.
- Steinhaus, H. (1949), *Drogi matematyki stosowanej*, „Matematyka” 3 (5), s. 8–19; przedruk w: Steinhaus 2000, s. 108–120.
- Steinhaus, H. (1958), *O ścisłości matematycznej*, „Matematyka” 3 (53), s. 26–47; przedruk w: Steinhaus 2000, s. 49–59.
- Steinhaus, H. (1980), *Słownik racjonalny*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk, wyd. drugie uzupełnione: Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków 1993.
- Steinhaus, H. (2000), *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław.
- Twardowski, K. (1927), *Symbolomania i pragmatofobia*, w: *Rozprawy i artykuły filozoficzne*, Lwów, s. 394–406; przedruk w: *Wybrane pisma filozoficzne*, PWN, Warszawa 1965, s. 354–363.
- Twardowski, K. (1997), *Dzienniki*, tom 1: 1915–1927, tom 2: 1928–1936, do druku przygotował, wprowadzeniem i przypisami opatrzył R. Jadczak, Wydawnictwo Adam Marszałek, Warszawa–Toruń.

- Whitehead, A.N., Russell B. (1925–1927), *Principia Mathematica*, second edition, vol. I–III, The University Press, Cambridge.
- Żyliński, E. (1918), *O zasadach logiki i matematyki*, „Sprawozdania Polskiego Towarzystwa Naukowego w Kijowie”, s. 31–32.
- Żyliński, E. (1921–1922), *O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej*, „Ruch Filozoficzny” 6, s. 71a–71b (autoreferat).
- Żyliński, E. i in. (1924), *Memoriał profesorów: E. Żylińskiego, H. Steinhausa, St. Ruziewicza i S. Banacha w sprawie studjum matematycznego na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie* adresowany do Departamentu Nauki i Szkół Wyższych Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Lwów, 14 kwietnia 1924 r., Archiwum Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk w Sopocie.
- Żyliński, E. (1925), *Some Remarks Concerning the Theory of Deduction*, „Fundamenta Mathematicae” 7, s. 203–209.
- Żyliński, E. (1927), *O przedstawialności funkcji prawdziwościowych jednych przez drugie*, „Przegląd Filozoficzny” 30, z. IV, 290.
- Żyliński, E. (1928), *Z zagadnień matematyki*, cz. II: *O podstawach matematyki*, „Kosmos”, Seria B 53, s. 42–53.
- Żyliński, E. (1935), *Formalizm Hilberta*, cz. I: *Formalizm H_1* , Nakładem Towarzystwa Naukowego, Lwów.

Streszczenie

W pracy rozważa się poglądy filozoficzne związane z matematyką i logiką czołowych przedstawicieli lwowskiej szkoły matematycznej: Stefana Banacha, Hugona Steinhausa, Eustachego Żylińskiego i Leona Chwistka. Trzej pierwsi formułowali swoje poglądy filozoficzne niejako w tle, natomiast w przypadku Chwistka idee filozoficzne odgrywały istotną rolę i decydowały o wyborze kierunków jego badań.