Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 21: 2012, Nr 3 (83), ISSN 1230–1493
DOI: 10.2478/v10271-012-0060-z

Wykład specjalny pod patronatem naukowym „Przeglądu Filozoficznego”

Rafał Urbaniak

Abstrakcja bez bytów abstrakcyjnych

Słowa kluczowe: *nominalizm, arytmetyka, liczby, zasady abstrakcji, neologicyzm*

1. Kwestie wstępne

Filozofia matematyki może być ciekawa nie tylko dla filozofów zajmujących się matematyką. Stanowi ona pole bitwy dla szerszych kwestii, stanowisk i strategii filozoficznych. Fascynująca jest interakcja między czynnikami epistemologicznymi i ontologicznymi: im silniejsza ontologia, tym więcej pojawia się pytań epistemologicznych; im ontologia słabsza – tym więcej pytań dotyczących natury prawdziwości twierdzeń matematycznych itp.

Dla przykładu weźmy liczby naturalne. Jedno z najprostszych (przynajmniej pozornie) wyjaśnień natury prawd arytmetycznych to powiedzenie, że zdania typu „2 + 2 = 4” są prawdziwe, ponieważ istnieją obiekty abstrakcyjne takie jak liczby, i taka funkcja dodawania na nich określona, że zastosowana do liczby dwa (dwa razy) da nam liczbę cztery.

Podobna odpowiedź skłania jednak do zapytania o naturę naszej wiedzy o przedmiotach abstrakcyjnych. Jeżeli liczby są obiektami niepowiązanymi przyczynowo ze światem fizycznym (w którym żyjemy), to w jaki sposób możemy o nich coś wiedzieć?

Możemy próbować uniknąć tego typu wyzwań, mówiąc że liczby nie istnieją. Wtedy jednak musimy albo zaprzeczyć, że 2 + 2 = 4, albo podać jakieś inne wyjaśnienie prawdziwości tego zdania. Jakie?

Oprócz interakcji pomiędzy kwestiami epistemologicznymi i ontologicznymi mamy też aspekt pragmatyczny. Adekwatna filozofia arytmetyki powinna wyjaśniać stosowalność arytmetyki do problemów dotyczących świata fizycznego.

Celem mojej pracy jest zarysowanie, w jaki sposób można być realistą w kwestii wartości logicznej zdań arytmetyki, nie będąc realistą w kwestii ontologii obiektów arytmetycznych, zarazem jednak wyjaśniając stosowalność arytmetyki.

Wątkiem docelowym będzie ukonkretyzowanie intuicji, które wyraził Tarski w dyskusji z Carnapem:

> Miałoby się nadzieję, a może i przypuszczenie, że cała ogólna teoria zbiorów, jakkolwiek piękna by była, w przyszłości zniknie. Z wyższymi typami zaczyna się platonizm. Tendencje Chwistka i innych („nominalizm"), by mówić tylko o możliwości nazywania, są zdrowe (folder RC 090-16-09 z archiwum Carnapa; tłum. za: Mancosu 2005: 334).

Aby dotrzeć do tego punktu, najpierw przypomnę, jak wygląda standardowa redukcja liczb naturalnych do obiektów teoriomnogościowych i dlaczego uważam ją za filozoficznie niesatysfakcjonującą. Następnie opowiem o teorii, którą skonstruował Frege i wyjaśnię, jakie były z nią problemy. Dotyczyć one będą głównie tzw. Podstawowego Prawa Numer Pięć, więc poświęcę trochę uwagi temu prawu. Potem z kolei przedstawię próbę ratowania programu Fregowskiego w ramach nurtu zwanego neologicyzmem, oraz wyzwania, na jakie ten nurt natrafia. Wreszcie przejdę do omówienia poglądów, jakie o arytmetyce żywił Kotarbiński, i pokażę, w jaki sposób, posługując się jego pomysłami, można poprawić neologicyzm tak, aby otrzymać bardziej satysfakcjonującą filozofię arytmetyki.

2. Redukcja teoriomnogościowa

Zazwyczaj liczby naturalne identyfikuje się w teorii mnogości z jednym z dwóch ciągów:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

gdzie następnik x to $\{x\}$, lub:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

gdzie następnik x to suma x i $\{x\}$.

Istnieje jednak nieskończenie wiele sposobów konstrukcji teoriomnogościowych odpowiedników liczb naturalnych. Na takich ciągach można dość łatwo zdefiniować odpowiednie funkcje dodawania i mnożenia, oraz dowieść prawdziwości wszystkich aksjomatów standardowej arytmetyki (Peano) w tej interpretacji.

Matematykom – zazwyczaj niezainteresowanym filozoficznymi pytaniami dotyczącymi ich dziedziny – to wystarcza. Struktura dziedziny jest taka sama niezależnie od wybranego wariantu; teorie sformułowane w danym języku formalnym są takie same – nie ma powodu, żeby się rozdrabniać.

Jednak z perspektywy filozoficznego pytania o naturę liczb naturalnych sprawa nie jest trywialna. Zakładając nawet, że wiemy co to są zbiory, że nie mamy wątpliwości co do ich istnienia i że wiemy, która teoria mnogości jest adekwatną teorią takich zbiorów, dalej powinniśmy odpowiedzieć na pytanie: który sposób konstrukcji liczb naturalnych ma być naszym przewodnikiem, jeżeli potrzebujemy odpowiedzi dotyczących ich ontologii?[1].

Wedle pierwszej wymienionej strategii, liczba dwa to {{ Ø}}. Wedle drugiej strategii, liczba dwa to {Ø, { Ø}}. Zbiory te nie są identyczne, więc o ile teoria mnogości ma dać nam ontologię liczb naturalnych, liczba dwa nie może być oboma tymi zbiorami jednocześnie, a jednak powinna być którymś z nich. Którym? Nie ma żadnego merytorycznego powodu, by preferować którąkolwiek z opcji. A skoro tak, to wygląda na to, że również nie ma powodu, by uważać, że którakolwiek z nich jest trafna.

Z tego typu rozważań o redukcji ontologicznej w matematyce wyłania się następująca refleksja. Być może liczb naturalnych nie należy redukować do innych obiektów, bo matematycznie rzecz biorąc, zawsze będzie więcej niż jeden sposób, by to uczynić, więc zawsze pojawi się problem kryteriów wyboru ontologicznie doniosłej opcji? Być może zamiast tego należy liczby naturalne potraktować jako obiekty *sui generis*?

Strategii takiej można by zarzucić, że zaburza jedność podstaw matematyki. Zamiast jednej podstawowej teorii (mnogości) postuluje się wielość różnych teorii o różnych obiektach (skoro *sui generis* są liczby naturalne, to czemu nie liczby całkowite, rzeczywiste czy urojone?). Zarzut ten niepotrzebnie wiąże ze sobą jedność teorii podstawowej z jednolitością jej ontologii. Być może można podać jednolitą teorię podstaw matematyki, nie twierdząc zarazem, że ontologicznie rzecz biorąc wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami. Taką teorię będę starał się wskazać pod koniec mojego wykładu. Na razie jednak, przyjrzę się arytmetyce u Fregego.

3. Frege

Jak dobrze wiadomo, relacja równoliczności między predykatami definiowalna jest w języku drugiego rzędu. Predykaty F i G są równoliczne, gdy istnieje taka wzajemnie jednoznaczna relacja dwuargumentowa, która każdemu F-owi przyporządkowuje jakiegoś G-ka w taki sposób, że każdy G-k przyporządkowany jest jakiemuś F-owi. Podobnie w języku pierwszego rzędu wyrazić można zwroty typu „istnieje dokładnie n F-ów".

[1] Na problemy tego typu zwrócił uwagę Benacerraf (1965).

To jednak nie wyjaśnia całkowicie funkcjonowania arytmetyki, gdyż w języku arytmetyki liczebniki występują *jako rzeczowniki* i pojawiają się w kontekstach innych niż „istnieje dokładnie *n F*-ów”. Co więcej, w języku arytmetyki mamy też kwantyfikację. Możemy formułować takie zdania, jak: „dla każdej liczby istnieje liczba większa od niej”, co wskazuje (*prima facie*) na to, że powinna istnieć jakaś dziedzina *przedmiotów*, które leżą w zasięgu takiej kwantyfikacji. Nawet jeżeli przepiszemy ten zwrot jako „dla każdego *F*, jeżeli istnieje dokładnie *n F*-ów, to istnieje takie *G* i takie *m*, że istnieje dokładnie *m G*-ków i jest więcej *F*-ów niż *G*-ków”, to dalej nie wyjaśniliśmy, *po czym kwantyfikujemy*, gdy mówimy, że *istnieje takie m*. Terminy liczbowe zachowują się syntaktycznie jak terminy jednostkowe: wyglądają jak nazwy, o których orzekamy predykaty, oraz dopuszczają zastępowanie ich zmiennymi i kwantyfikację. Jak jednak wprowadzić terminy liczbowe, które zachowują się jak terminy jednostkowe?

Pewien pomysł, jak to uczynić, zaczerpnąć można z *Traktatu* Hume’a (I.iii.1):

> Posiadamy dokładny standard, którym możemy oceniać równość i proporcję liczb; i wedle tego, czy spełniają one, czy nie, ten standard, określamy ich relacje bez żadnej możliwości błędu. Gdy dwie liczby są tak połączone, że jedna ma zawsze jednostkę odpowiadającą każdej jednostce drugiej, orzekamy, że są równe [tłum. R.U.].

Kryterium więc jest następujące: liczba *F*-ów jest identyczna liczbie *G*-ków wtedy i tylko wtedy, gdy *F* i *G* są równoliczne[2]. Zasada ta nazywa się w literaturze Zasadą Hume’a (będę się do niej odnosił standardowym skrótem wywodzącym się od *Hume’s Principle*):

(HP) $N(F) = N(G)$ wtw $F{\sim}G$

Zasada ta ma po prawej stronie równoważnościową (zwrotną, przechodnią, symetryczną) relację równoliczności, zdefiniowaną za pomocą aparatury logicznej. Po lewej stronie wprowadza nowe terminy jednostkowe o postaci $N(F)$ i podaje ich warunki identyczności. Powstaje pytanie: jaką moc matematyczną ma HP, gdy dodamy tę zasadę do logiki drugiego rzędu? Odpowiedzi na to pytanie udzielił Frege.

Po pierwsze, HP pociąga za sobą istnienie zera. Wystarczy bowiem wziąć logicznie niespełnialny predykat nieidentyczności z samym sobą, a HP dowiedzie nam istnienia liczby obiektów, które nie są identyczne same z sobą: liczby zero.

Po drugie, HP pozwala na dowiedzenie istnienia nieskończoności liczb naturalnych. Skoro mamy liczbę zero, możemy sformułować predykat

2 Równoliczność jest definiowalna za pomocą środków czysto logicznych.

„$x = 0$”, który stosuje się do dokładnie jednego przedmiotu (liczby zero), i dowieść istnienia liczby tego predykatu – liczby jeden. Następnie bierzemy predykat „$x = 0$ lub $x = 1$”, który stosuje się do dokładnie dwóch przedmiotów (liczby zero i liczby jeden), i dowodzimy istnienia liczby tego predykatu, itd.

Po trzecie, HP pozwala na wyprowadzenie indukcji matematycznej, a przy odpowiedniej definicji dodawania i mnożenia pozwala na dowiedzenie wszystkich aksjomatów standardowej teorii liczb naturalnych, czyli arytmetyki Peana drugiego rzędu[3].

Co więcej, o ile niesprzeczna jest analiza matematyczna, otrzymana teoria jest niesprzeczna (Heck 1996 i Boolos 1987). Mamy więc w miarę proste kryterium identyczności liczb, które zarazem pozwala na uzyskanie w sposób niesprzeczny zadowalającej arytmetyki liczb naturalnych. Teoria ta w pewien sposób wyjaśnia też stosowalność arytmetyki do rzeczywistości: liczby powiązane są w sposób systematyczny z predykatami, które stosować się mogą do rozmaitych przedmiotów.

Czy dostaliśmy zadowalającą filozoficznie teorię liczb naturalnych? Niezupełnie. Frege sam nie poprzestał na HP, uważając, że tak otrzymana teoria nie radzi sobie z tzw. *problemem Cezara*:

> nigdy nie możemy zdecydować za pomocą naszych definicji, czy jakiemuś pojęciu nie odpowiada liczba Juliusz Cezar, lub czy ten zdobywca Galii jest liczbą, czy nie (Frege 1884).

O ile w pierwszej chwili zarzut ten wygląda nieco absurdalnie, jest on filozoficznie doniosły. Problem polega na tym, że sama zasada HP mówi nam jedynie, jak oceniać identyczności o postaci $N(F) = N(G)$, gdzie oba terminy są terminami liczbowymi. Nie podaje natomiast żadnych kryteriów oceny zdań typu „Juliusz Cezar = $N(F)$ – a powinna w prosty sposób prowadzić do fałszywości takich stwierdzeń.

Inaczej rzecz ujmując, HP mówi, kiedy dwie liczby są identyczne, ale nie mówi, które przedmioty są liczbami i gdzie ich szukać. Dzięki HP wiem na przykład, kiedy liczba moich włosów jest identyczna z liczbą włosów Prof. Chrudzimskiego (a raczej nie jest), ale dalej nie mam pojęcia, czy tą liczbą jest niniejsze krzesło, czy jakiś inny obiekt.

W świetle problemu Cezara (przynajmniej według interpretacji Hecka) Frege zdecydował się podać bezpośrednią definicję liczby za pomocą pojęcia

[3] Szczegóły nie są w tej chwili istotne. Arytmetyka Peana drugiego rzędu zawiera aksjomaty opisujące liczbę zero, funkcje następnika, dodawania i mnożenia oraz indukcję matematyczną dla wszystkich zbiorów liczb naturalnych („dowolny zbiór zawierający zero i następnik każdego swojego elementu zawiera wszystkie liczby naturalne”). Jedną z ciekawych własności tej teorii jest fakt, że zdanie arytmetyki drugiego rzędu jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest (semantyczną) konsekwencją tych aksjomatów.

ekstensji. Wedle tej definicji *N(F)* to ekstensja pojęcia „pojęcie równoliczne z *F*”. Aby otrzymać pełną teorię liczb, należało więc podać teorię ekstensji. Teorię taką oparł Frege na swoim Podstawowym Prawie Numer Pięć (w literaturze zazwyczaj oznaczane jest ono jako BLV od angielskiego *Basic Law V*):

(BLV) $E(F) = E(G)$ wtw $\forall x\ [Fx \equiv Gx]$

BLV powiada, że ekstensja *F*-ów jest identyczna z ekstensją *G*-ków wtw, gdy dokładnie te same przedmioty podpadają pod oba predykaty. BLV razem z bezpośrednią definicją liczby pozwala na *dowiedzenie* HP, a zatem i na otrzymanie arytmetyki Peana.

Gdy się nad tym zastanowić, posłużenie się przez Fregego BLV nie było ruchem zwycięskim.

- O ile problem Cezara pojawia się dla liczb określanych za pomocą HP, pojawia się również dla pojęcia ekstensji określanego za pomocą BLV. Można przecież równie dobrze argumentować, parafrazując Fregego: „Nigdy nie możemy zdecydować za pomocą naszych definicji, czy jakiemuś pojęciu nie odpowiada ekstensja Juliusz Cezar, lub czy ten zdobywca Galii jest ekstensją, czy nie”.
- Co więcej, istnieje więcej niż jeden sposób, na który można podać definicję liczb za pomocą zbiorów – pojawia się więc ponownie (omówiony wcześniej) problem arbitralności interpretacji teoriomnogościowej.

Problemów tych Frege nie dostrzegał. Natomiast, jak dobrze wiadomo, świadom był innej trudności, na którą zwrócił jego uwagę Russell: BLV prowadzi do sprzeczności. Podstawienie jednego i tego samego (ale dowolnego) predykatu zarówno za *F* i *G* daje prosty dowód istnienia ekstensji dowolnego predykatu – pełnej komprehensji. W takim razie wynika z BLW również istnienie ekstensji predykatu „nie jest swoim własnym elementem”, co prowadzi do wniosku że ta ekstensja jest swoim elementem wtw, gdy nim nie jest. Frege, w obliczu tej trudności, po nieudanych próbach poradzenia sobie z kłopotami, zajął się innymi rzeczami. To jednak nie znaczy, że pewnego „rdzenia” programu Fregego nie da się uratować. Przejdźmy do omówienia takiej próby.

4. Neologicyzm

HP i BLV mają ze sobą coś wspólnego: format. Prawa strona zawiera pewną relację równoważnościową, a lewa wprowadza identyczność pomiędzy nowymi terminami jednostkowymi, zbudowanymi z nowych terminów funkcyjnych i argumentów, które występują już po prawej stronie równania. Zasady tego formatu nazywamy *zasadami abstrakcji* (AP, od *abstraction principles*). Poza HP i BLV, kolejnym przykładem AP, podanym również przez Fregego, jest zasada, która powiada, że kierunek *x*-a jest taki sam jak kierunek *y*-a wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są równoległe. Zasada ta wprowadza pojęcie kierunku posługując się równoważnościową relacją równoległości.

Próbę ożywienia programu Fregego i posłużenia się w sposób systematyczny AP dla konstrukcji alternatywnych podstaw matematyki podjęto w obrębie kształtującego się od lat 80. XX wieku nurtu zwanego *neologicyzmem* (Wright 1983; Zalta 1983; Hale i Wright 2001). Głównym celem tego ruchu jest posługiwanie się bezpiecznymi AP (a więc bardziej takimi jak HP niż takimi jak BLV), tak aby otrzymać interesujące teorie matematyczne. Klasycznym przykładem jest posłużenie się HP dla otrzymania arytmetyki liczb naturalnych. Zwolennik neologicyzmu uznaje pewne AP za analityczne lub prawdziwe na mocy swojego znaczenia, a obiekty będące przedmiotem danych AP za przedmioty *sui generis*.

Podejście to nie jest pozbawione trudności. Niektóre zasady (jak BLV) z odpowiednią teorią logiczną w tle prowadzą do sprzeczności. Fakt ten rodzi kłopoty.

- Po pierwsze, należy potrafić odróżnić niesprzeczne AP od AP sprzecznych, a wiadomo, że nie istnieje ogólna procedura pozwalająca to uczynić (być może nie trzeba się tym aż tak przejmować; logika pierwszego rzędu jest też nierozstrzygalna, a nikt z tego powodu jej nie porzuca).
- Po drugie, sprzeczność BLV podważa przekonanie o analityczności AP: w jaki sposób pewne zdania o danej formie mogą być analityczne, skoro inne zdania o tej samej formie są sprzeczne? (być może nie jest to aż tak problematyczne: wszak fakt, że pewne koniunkcje są sprzeczne, nie prowadzi do odrzucenia analityczności wszystkich koniunkcji).
- Po trzecie, samo powiedzenie, że bezpieczne są te AP, które są niesprzeczne, nie wystarcza. Istnieją bowiem AP, które osobno są niesprzeczne, ale wzajemnie się wykluczają (problem ten nosi miano problemu *złego towarzystwa* – pewne AP osobno są „grzeczne", ale w grupach „rozrabiają"). Zjawisko to pojawia się, ponieważ różne AP mogą nakładać rozbieżne wymogi na rozmiar dziedziny przedmiotów, których dotyczyć ma dana teoria. Dla przykładu HP (jako że dowodzi istnienia nieskończoności liczb) prawdziwe może być tylko w dziedzinie nieskończonej. Z drugiej jednak strony, istnieją niesprzeczne AP, które prawdziwe są tylko w dziedzinach skończonych[4].
- Kolejna trudność pojawia się, gdy przyjrzymy się AP takim jak HP. Zasada Hume'a po prawej stronie równoważności zawiera wyrażenie, które *prima facie* posługuje się tylko terminologią logiczną i nie wymaga istnienia żadnych obiektów, które byłyby liczbami (mianowicie: „F jest rów-

[4] Na przykład zasada parzystości, która powiada, że parzystość F-ów jest identyczna z parzystoscią G-ków wtw, gdy symetryczna różnica ekstensji tych predykatów ma moc podzielną przez dwa, wymaga, by istniała tylko skończona ilość przedmiotów.

noliczne z *G*”). Lewa strona natomiast zawiera identyczność pomiędzy jednostkowymi terminami w zamierzeniu odnoszącymi się do liczb. Prawdziwość takiej identyczności, przynajmniej na pierwszy rzut oka, wymaga istnienia liczb. W jaki sposób równoważność, której jedna strona posiada konsekwencje egzystencjalne niewystępujące po drugiej może być analityczna?

Pojawiają się więc: *problem Cezara*, *problem analityczności* oraz *problem warunków akceptowalności AP*. Ten ostatni doprowadził do bardzo technicznej dyskusji, która wciąż trwa[5].

Co począć? Otóż moim zdaniem, pewnych sugestii dotyczących modyfikacji neologicyzmu dostarcza myśl Tadeusza Kotarbińskiego. Co miał on do powiedzenia na temat liczb?

5. Kotarbiński

Jednym z najciekawszych pomysłów Kotarbińskiego, jeżeli chodzi o filozofię języka, było wprowadzenie pojęcia *nazwy pozornej*. Motywowany swoim reizmem ontologicznym, Kotarbiński zasugerował, że istnieje cała grupa wyrażeń, które gramatycznie zachowują się tak jak nazwy, ale w rzeczywistości nic nie nazywają – są jedynie pozbawionymi odniesienia wyrażeniami, wprowadzanymi dla wygody i prostoty wypowiedzi:

> …wszelkie zdania, w których wypowiada się coś pozornie o innym jakimś przedmiocie, nie o rzeczy jakiejś, traktujemy jako zwroty zastępcze dla zdań innych, rozumianych już literalnie, a orzekających wyłącznie o rzeczach (Kotarbiński 1929: 60).

Posługując się szeregiem przykładów, Kotarbiński wskazywał, jak eliminować takie nazwy pozorne z wyrażeń złożonych mówiących coś o zdarzeniach, relacjach, cechach czy obiektach abstrakcyjnych, takich jak *białość* (dla przykładu: wyrażenie „białość jest kolorem” naprawdę mówi: „cokolwiek jest białe, jest kolorowe”). Niestety, Kotarbiński nie skonstruował szczegółowo ogólnej teorii mechanizmu, który dzięki wprowadzaniu nazw pozornych pozwalałby na zwiększenie wydajności komunikacji.

O terminach w zamierzeniu odnoszących się do zbiorów Kotarbiński powiada:

> Co się zaś tyczy specjalnie owych „klas”, to przy opisanym przed chwilą rozumieniu mamy tu niewątpliwie jakąś nazwę pozorną, której właściwą rolę winniby wyjaśnić przez odpo-

[5] Istnieją też inne aspekty neologicyzmu nadal obecnie dyskutowane, ale nie wchodźmy w szczegóły.

> wiednią definicję w uwikłaniu autorowie, operujący tym terminem, w tym zagadkowym sensie (Kotarbiński 1929: 105).

Kotarbiński uważał więc, że terminy teoriomnogościowe są nazwami pozornymi, ale nie podjął się redukcji wypowiedzi, które je zawierają, do wyrażeń niezawierających nazw pozornych. Zadanie to pozostawił dla tych, którzy chcieli się takimi terminami posługiwać.

Przyjrzyjmy się wreszcie (nieco długawej) wypowiedzi Kotarbińskiego o języku arytmetyki:

> Przypuśćmy, że ktoś określa matematykę jako naukę o liczbach. Pytamy dalej o definicję „liczby". Odpowiedź, której udzieli znawca matematyki, będzie niewątpliwie nader odmienna od tej, na którą mógłby się zdobyć laik … W tym nadmiarze rozmaitych stanowisk niechaj nam wolno będzie wyróżnić stanowisko nominalizmu i za nim się opowiedzieć. Nominalizm sądzi, że żaden przedmiot nie jest liczbą i że ani arytmetyka, ani tzw. „teoria liczb", ani tym bardziej matematyka, w ogóle nie budują zdań, które by można nazwać ściśle zdaniami o liczbach w tym sensie, w jakim np. zoologia mówi o zwierzętach. Arytmetyka różni się od nauk przyrodniczych nie tym, o czym mówi, lecz tym, co mówi o rzeczach. Mówi mianowicie, że jeżeli takie a takie rzeczy są tak a tak liczne, to takie a takie znowu rzeczy są tak a tak znowu liczne. Weźmy np. pod uwagę zdanie arytmetyczne „$3 + 2 = 5$". To powiedzenie skrótowe dokładniej brzmieć winno: „Dla każdego x: $3x + 2x = 5x$", gdzie „x" jest zmienną nazwową (Kotarbiński 1929: 341–342).

Jakie pomysły można by zaczerpnąć od Kotarbińskiego, próbując ulepszyć neologicyzm?

Po pierwsze, być może warto spojrzeć na filozofię matematyki z perspektywy nominalistycznej. Nie czas teraz i miejsce, by zająć się uzasadnianiem nominalizmu jako punktu wyjścia. Wspomnę tylko, że rozważania motywujące nominalizm opierają się zazwyczaj:

1) na fakcie że epistemologia realistycznych ontologii w filozofii matematyki jest najczęściej bardzo tajemnicza (czym jest bezpośrednia intuicja obiektów matematycznych?),
2) na ogólnych intuicjach wspierających oszczędność ontologiczną (jeżeli da się filozoficznie zrozumieć matematykę nie postulując obiektów abstrakcyjnych, to czemu nie?),
3) na czynniku „wewnętrznym" względem rozważanej filozofii matematyki (fakt, że nominalistyczne podejście do neologicyzmu pozwala na jego ulepszenie, jest czynnikiem wspierającym trafność nominalizmu).

Po drugie, od Kotarbińskiego warto zapożyczyć aparaturę nazw pozornych. Chociaż Kotarbiński nie podał mechanizmu ich funkcjonowania, obecna hipoteza jest następująca: zasady abstrakcji uzupełniają ten brak – AP to właśnie reguły językowe mówiące nam coś nie o nowej klasie obiektów abstrakcyjnych, tylko wprowadzające nowe nazwy pozorne. Dana AP spełnia podwójne zadanie. Z jednej strony wprowadza systematycznie taką nazwę pozorną, wiążąc ją (na przykład) z wcześniej dostępnymi predykatami. Z drugiej strony podaje nam ona również sposób oceny zdań zawierających identyczności, których argumentami są nazwy pozorne.

W jaki sposób takie podejście modyfikuje nasz sposób myślenia o neologicyzmie?

6. Neologicyzm nominalistyczny

Z perspektywy nominalistycznej, HP powiada, że dla każdego możliwego predykatu *P* można wprowadzić nazwę pozorną „liczba *P*" (*N*(*P*)), oraz że powinniśmy ignorować różnice pomiędzy nazwami pozornymi *N*(*P*) i *N*(*Q*), jeżeli *P* i *Q* są równoliczne.

W przeciwieństwie do wyjściowego pomysłu Fregego, nie uznajemy istnienia jednej dużej dziedziny, w której znajduje się wszystko: ekstensje, liczby itd. (wszak to właśnie umieszczanie wszystkich ekstensji w wyjściowej dziedzinie przedmiotów zaowocowało sprzecznością BLV). Teraz osobno znajduje się wyjściowa dziedzinę przedmiotów, a nad nią nadbudowuje się poziom możliwych nazw pozornych wprowadzanych przez HP.

Pewną trudnością jest, że skoro nie można uznać, że liczby należą do wyjściowej dziedziny przedmiotów, nie powiedzie się Fregowski dowód nieskończoności liczb. I faktycznie, HP interpretowana nominalistycznie może być prawdziwa, nawet jeżeli dziedzina jest skończona (po prostu na poziomie nazw pozornych znajdować się będzie tylko skończona liczba potencjalnych terminów numerycznych).

Trudności tej można uniknąć, jeśli się uzna, że zamiast jednego poziomu terminów numerycznych można mieć ich całą hierarchię iteratywną. Nad dziedziną przedmiotów otrzyma się możliwe predykaty poziomu 1. Nad nimi znajdują się nazwy pozorne związane z predykatami poziomu 1. Ale takie nazwy pozorne też można określać predykatami (o ile nie pozwalają nam one rozróżniać tych nazw pozornych, które wedle AP powinno się identyfikować), a z takimi predykatami można wiązać kolejne możliwe numeryczne nazwy pozorne, otrzymując hierarchię iteratywną (to znaczy predykaty mogą odnosić się do dowolnych obiektów niżej w hierarchii, nie tylko do obiektów jeden poziom niżej), w której bez trudności da się dowieść nieskończoności możliwych nieidentycznych ze sobą terminów numerycznych.

Nawet jeżeli na przykład wybrana dziedzina jest pusta, zawsze można wprowadzić na poziomie 1 predykat niespełnialny. HP pociągnie wtedy wniosek, że istnieje odpowiadająca mu nazwa pozorna, powiedzmy „0". W takim razie, można poziom wyżej wprowadzić predykat „$x = 0$". Poziom wyżej, HP doprowadzi do istnienia terminu numerycznego odpowiadającego temu predykatowi – i tak dalej. Ogólnie rzecz biorąc, nieskończoność dziedziny zostaje zastąpiona nieskończonością możliwych kolejnych kroków we wprowadzaniu nazw pozornych, predykatów odnoszących się do nich itd.[6]

Przyjrzyjmy się teraz pobieżnie, w jaki sposób to podejście pozwala (moim zdaniem) poradzić sobie z problemami, na które natrafia neologicyzm.

- Niektóre AP są sprzeczne. Jeżeli jednak posłużymy się hierarchią iteratywną, problem znika. Nawet BLV jest niesprzeczne (bo ekstensje nie mają należeć do dziedziny wyjściowej). Co więcej, iteratywna hierarchizacja BLV prowadzi do otrzymania nominalistycznej interpretacji teorii mnogości Zermela z aksjomatem wyboru[7].
- Pojawił się problem złego towarzystwa. W obecnej sytuacji problemu nie ma. Gdy nie umieszcza się wszystkich obiektów razem w jednej dziedzinie, nie mają one gdzie „rozrabiać”. Każde zastosowanie AP skutkuje nowym poziomem hierarchii, a różne zasady abstrakcji dają różne typy nazw pozornych, które nie wchodzą między sobą w żadną szkodliwą interakcję.
- Zachodziło podejrzenie, że lewa strona AP ma konsekwencje egzystencjalne, których nie ma prawa strona. W interpretacji nominalistycznej tak jednak nie jest. Lewa strona nie pociąga za sobą istnienia żadnych przedmiotów, a jedynie możliwość wprowadzenia pewnych nazw pozornych.
- Wyglądało na to, że AP nie mówią nam nic na temat wartości identyczności mieszanych, takich jak „Cezar = 2”. Odpowiedź teraz jest prosta. AP mają wprowadzać nazwy pozorne, a skoro „Cezar” nie jest nazwą pozorną (mam nadzieję), to identyczności między nazwami pozornymi i prawdziwymi, choć zrozumiałe i poprawnie zbudowane, są po prostu fałszywe.

7. Podsumowanie

Wychodząc od omówienia teoriomnogościowej interpretacji arytmetyki liczb naturalnych, argumentowałem, że jest ona niesatysfakcjonująca filozoficznie: dopuszcza zbyt wiele opcji, nie dając żadnego powodu, aby preferować którąkolwiek z nich.

Omówiłem podejście do arytmetyki prezentowane przez Fregego. O ile część jego teorii dawała pewną teorię arytmetyki, redukcja liczb do ekstensji

[6] Można by się martwić, czy nie natrafimy na problem, który pojawił się w przypadku systemu Russella: czy nie otrzymamy nieskończenie wielu kopii tej samej liczby na różnych poziomach hierarchii? Otóż nie. Brak mi tu czasu, by kwestię w tej chwili wyjaśnić, ale omawiam ją szczegółowo w: Urbaniak 2010.

[7] Więcej na ten temat w: Urbaniak 2010.

była nieprzekonująca z tego samego powodu, z jakiego niezadowalająca jest redukcja teoriomnogościowa. Co więcej, problem Cezara, stanowiący motywację redukcji liczb do ekstensji, pojawia się również w przypadku pojęcia ekstensji i BLV. Wreszcie BLV w obrębie teorii Fregego prowadzi do sprzeczności, bo narzuca sprzeczne wymogi na rozmiar dziedziny.

Neologicyzm porzucił pomysł redukcji liczb do jakichkolwiek innych obiektów i zamiast tego oparł arytmetykę po prostu na zasadzie Hume'a. Natrafia jednak na zarzuty dotyczące kryteriów akceptowalności AP, natury ich analityczności, oraz na problem Cezara.

Kotarbiński wprowadził do obiegu pojęcie nazw pozornych, ale nie przedstawił żadnej szczegółowej teorii ich funkcjonowania czy systematycznego ich wprowadzania.

Moja hipoteza, wedle której AP to właśnie reguły systematycznie wprowadzające nazwy pozorne, prowadzi do reinterpretacji projektu neologicystycznego. W obrębie tej reinterpretacji otrzymujemy teorię mnogości (standardowym neologicystom nie udało się zastąpić BLV inną AP, tak aby otrzymać wystarczająco silną teorię mnogości) oraz arytmetykę. Perspektywa ta, moim zdaniem, pozwala też poradzić sobie z wyzwaniami filozoficznymi, które napotyka neologicyzm w standardowym jego sformułowaniu.

Bibliografia

Benacerraf P. (1965), *What numbers could not be*, „Philosophical Review" 74, s. 47–73.

Boolos G. (1987), *The consistency of Frege's foundations of arithmetic*, w: *On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright*, MIT Press, repr. *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press 1998.

Frege F. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, ed. W. Koebner, tłum. J.L. Austin: *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Oxford: Blackwell, 2nd revised edition 1974.

Hale B., Wright C. (eds) (2001), *The Reason's Proper Study. Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon Press.

Hale B., Wright C. (2005), *Logicism in the twenty-first century*, w: S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, s. 166–202.

Heck R. (1996), *The consistency of predicative fragments of Frege's Grundgesetze der Arithmetik*, „History and Philosophy of Logic" 17, s. 209–220.

Kotarbiński T. (1929), *Elementy Teorii Poznania, Logiki Formalnej i Metodologii Nauk*, Lwów: Ossolineum.

Mancosu P. (2005), *Harvard 1940-1941: Tarski, Carnap and Quine on a finitistic language of mathematics for science*, „History and Philosophy of Logic” 26, s. 327–357.
Urbaniak R. (2008), *Reducing sets to modalities*, w: *Reduction and Elimination. Proceedings of the 31st Wittgenstein Symposium*, s. 359–361.
Urbaniak R. (2010), *Neologicist nominalism*, „Studia Logica” 96, s. 151–175.
Urbaniak R. (2012), *Numbers and propositions versus nominalists. Yellow cards for Salmon & Soames*, „Erkenntnis”, Online First, DOI: 10.1007/s10670-012-9402-7
Wright C. (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.
Zalta E. (1983), *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*, D. Reidel.

Streszczenie

Teoriomnogościowa redukcja liczb naturalnych do zbiorów nie jest filozoficznie przekonująca: jest zbyt wiele możliwych sposobów jej dokonania, by twierdzić, że którykolwiek z nich ujawnia nam metafizyczną naturę liczb. Alternatywą wydaje się potraktowanie liczb jako obiektów *sui generis* i wprowadzanie ich za pomocą Zasady Hume'a: „Liczba *F*-ów jest identyczna z liczbą *G*-ków wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy *F*-ami i *G*-kami”. W niniejszej pracy argumentuję, że najbardziej satysfakcjonującą interpretacją tej zasady jest interpretacja nominalistyczna, wedle której zasada ta powiada nam, w jaki sposób można systematycznie wprowadzać wyrażenia nieodnoszące się do niczego, a syntaktycznie zachowujące się jak terminy jednostkowe.