Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 23: 2014, Nr 3 (91), ISSN 1230–1493

Roman Murawski

Na marginesie artykułu prof. Adama Nowaczyka „Zrozumieć Tarskiego"

Zacznijmy od uwagi, że Tarski w swojej pracy *O pojęciu prawdy w językach nauk dedukcyjnych* nie definiuje prawdy, ale próbuje wyjaśnić, co to znaczy „zdanie prawdziwe", czyli zajmuje się predykatem prawdziwości. Interesuje go ekstensja pojęcia „prawda". Czyni to, jak powszechnie wiadomo, używając pojęcia spełniania. Zauważmy przy tym, że mówiąc o spełnianiu formuły przez pewien ciąg, rozważa nieskończone ciągi indywiduów. Jest to − jak podkreśla prof. Nowaczyk − konsekwencją faktu, że funkcje zdaniowe mogą zawierać dowolną liczbę zmiennych wolnych. Definiując, co to znaczy „zdanie prawdziwe", mówi, że jest to równoważne stwierdzeniu, iż zdanie jest spełnione przez każde wartościowanie − a jest ich przecież nieskończenie wiele. Warto zwrócić uwagę, że wkracza tu (do metasystemu, w którym formułujemy definicje spełniania i prawdziwości) nieskończoność. Okazuje się, że semantyka wymaga nieskończoności − poniżej wskażemy jeszcze inne aspekty tego faktu.

Definicja Tarskiego odnosi się, co autor wyraźnie zaznacza już w samym tytule pracy, do języków nauk dedukcyjnych. W tłumaczeniach pracy na języki obce pojawia się − zamiast zwrotu „języki nauk dedukcyjnych" − termin „języki sformalizowane"[1]. Chodzi zatem o języki, w których − jak wyjaśnia − „sens każdego wyrażenia jest jednoznacznie wyznaczony przez jego kształt" (Tarski 1933: 16). Czy można się tu dopatrywać jakiegoś związku z nominalizmem, którego sympatykiem był Tarski (por. Murawski 2011)? Języki nauk dedukcyjnych wymagają, by ich pojęcia były „sztywne", tzn. by ich sens i znaczenie nie były płynne i nieostre. Ta „sztywność" jest z kolei konieczna, aby móc

[1] Por. tłumaczenie niemieckie: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* (1935) i przekład angielski: *The Concept of Truth in Formalized Languages* (1956).

tworzyć dowolnie długie łańcuchy dedukcyjne, co jest oczywiście potrzebne w matematyce i logice, a co ma sens tylko wtedy, gdy użyte pojęcia nie zmieniają swego znaczenia i sensu w trakcie dedukcji.

Prof. Nowaczyk nie zwraca w swoim artykule uwagi na twierdzenie I z pracy Tarskiego, które to twierdzenie, a dokładniej jego część druga, nazywane jest dziś twierdzeniem Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy i zaliczane do tzw. twierdzeń limitacyjnych (por. Murawski 2014). Głosi ono:

> TWIERDZENIE I. (β) [*J*]*eśli klasa wszystkich tez metanauki jest niesprzeczna, to niepodobna skonstruować na gruncie metanauki trafnej definicji prawdy w sensie powyższej umowy*[2].

Po sformułowaniu tego twierdzenia Tarski opisuje ideę dowodu oraz podaje szkic dowodu. Dowód wykorzystuje metodę przekątniową zastosowaną przez Gödla w pracy *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica” und verwandter Systeme I* (Gödel 1931), w której udowodnił tzw. pierwsze twierdzenie o niezupełności[3]. Tarski zresztą wyraźnie stwierdza tę zależność od Gödla, pisząc:

> Zastosowaną tu metodę rozumowania zawdzięczamy p. K. Gödlowi, który użył jej do innych nieco celów w swej wydanej niedawno pracy Gödel$_3$ (...). Ten niezmiernie ważny i interesujący artykuł nie pozostaje w bezpośrednim związku z tematem niniejszej pracy − dotyczy bowiem zagadnień ściśle metodologicznych (...).
> Zaznaczę przy sposobności, że tw. I wraz z szkicem dowodu zostało włączone do niniejszej pracy już po oddaniu jej do druku: w chwili bowiem gdy praca ta została przedstawiona Warszawskiemu Towarzystwu Naukowemu (21.III.1931), artykuł p. Gödla nie był jeszcze, o ile mi wiadomo, wydrukowany. Toteż w pierwotnej redakcji zamiast pozytywnych wyników wypowiadałem jedynie pewne przypuszczenia, idące zresztą w tym samym kierunku, a oparte po części na własnych dociekaniach, po części zaś − na krótkim komunikacie Gödel$_2$, opublikowanym kilka miesięcy wcześniej. (Tarski 1933: przyp. 88)

To rodzi pytanie o priorytet: kto pierwszy udowodnił twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy i czy Gödel znał to twierdzenie? Problem ten rozważałem w pracy *Undefinability of truth. The problem of the priority: Tarski vs. Gödel* (Murawski 1998; zob. też Woleński 1991). Nie możemy tu przytaczać przeprowadzonych tam rozważań. Powiedzmy więc tylko, że analiza prac Tarskiego i Gödla prowadzi do następujących wniosków: Tarski przyznaje,

---

[2] W przekładzie angielskim (1956) mamy „in the sense of convention **T**” zamiast „w sensie powyższej umowy”. Przy tym przez konwencję T rozumie się równoważność: *X* jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy *p*, gdzie *X* jest nazwą zdania *p*.

[3] Wykład twierdzeń Gödla znaleźć można na przykład w: Murawski 2010; por. też Murawski 1999.

iż metoda dowodu twierdzenia o niedefiniowalności została zapożyczona od Gödla, ale wyraźnie podkreśla, że uzyskał ten wynik niezależnie od niego. Gödel zdawał sobie w roku 1931 sprawę z niedefiniowalności pojęcia prawdziwości − istotnie, to uświadomienie sobie kontrastu pomiędzy definiowalnością pojęcia dowodliwości i niedefiniowalnością pojęcia prawdziwości doprowadziło go do odkrycia fenomenu niezupełności teorii. Gödel w swoich pracach nie wspomina jednak o niedefiniowalności pojęcia prawdziwości, co więcej, świadomie unika pojęć „prawda” i „prawdziwy”, obawiając się, że ich użycie spotka się z negatywną reakcją ówczesnego *establishmentu* w dziedzinie podstaw matematyki, zdominowanego przez Hilberta i jego idee. Tarski był wolny od takich ograniczeń „ideologicznych” − istotnie, w szkole lwowsko-warszawskiej nie czyniono żadnych wstępnych założeń ograniczających przed przystąpieniem do właściwych badań (por. Woleński 1985; zob. też Murawski 2011). W związku z tym Tarski, choć − jak wspomniano wyżej − sympatyzował z nominalizmem, swobodnie stosował w swoich badaniach logicznych i matematycznych wszelkie poprawne metody, w szczególności nawet takie, których nominalista nie może zaakceptować.

Dodajmy jeszcze, że Gödel posługiwał się jedynie intuicyjnym pojęciem prawdziwości i prawdy. Czy widział potrzebę analizy tego pojęcia? Z jego listu do Carnapa wynika, że tak (por. Murawski 1998). Co więcej, wydaje się, że Gödel zamierzał rozwinąć teorię prawdy w oparciu o teorię mnogości w planowanej wspólnej pracy z Arendem Heytingiem, która miała być poświęcona aktualnym prądom w logice matematycznej − praca ta jednak nigdy nie powstała.

Wobec twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy dla danego języka w tym języku można postawić pytanie: gdzie zatem takie pojęcie jest definiowalne? Tutaj rzecz jest delikatna i wymaga subtelnych rozróżnień. Zbadano ją dokładnie w przypadku języka arytmetyki (por. np. Murawski 1999). Otóż przede wszystkim należy wyróżnić trzy sensy predykatu „prawdziwy” dla tego języka: (a) adekwatność na liczbach standardowych, czyli spełnienie konwencji (T) dla liczebników (nazw liczb), (b) spełnienie konwencji (T) dla dowolnych ciągów, (c) warunki definicji Tarskiego traktowane jako aksjomaty. Sens (c) jest najsilniejszy, sens (a) najsłabszy. Twierdzenie Tarskiego mówi o niedefiniowalności już w sensie (a), co pociąga oczywiście niedefiniowalność w obu pozostałych sensach. Można dowieść, że jeśli w jakiejś teorii da się zdefiniować predykat spełniania i prawdziwości w sensie (c) dla języka arytmetyki, to w teorii tej można udowodnić niesprzeczność arytmetyki.

Mimo że zgodnie z twierdzeniem Tarskiego nie można w arytmetyce zdefiniować pojęcia spełniania i prawdziwości dla całego języka arytmetyki, to można to uczynić dla fragmentów tego języka. Fragmenty te najdogodniej wyróżnić biorąc pod uwagę liczbę i rodzaj kwantyfikatorów, które mogą w formule wystąpić. Okazuje się, że predykat spełniania i prawdziwości dla formuł zawierających *n* (dowolna, ale ustalona liczba!) parami różnych kwantyfikatorów można zdefiniować formułą zawierającą tę samą liczbę i rodzaj kwantyfikatorów. Aby jednak zdefiniować taki predykat dla wszystkich formuł języka arytmetyki (zatem liczba *n* kwantyfikatorów może być teraz dowolna), użyć trzeba pewnego (niepredykatywnego) rozszerzenia arytmetyki, tzn. rozszerzenia, w którym mówić można o liczbach i o zbiorach liczb, a zatem o obiektach wyższego rzędu. I tu znów wkracza nieskończoność!

Fakt, że pojęcie spełniania i prawdziwości dla języka arytmetyki, a więc języka, w którym mówi się o (skończonych!) liczbach naturalnych, wymaga odwołania się do nieskończoności, ilustrują badania pokazujące, że w pewnych zakresach pojęcie prawdziwości może zostać zastąpione użyciem tzw. ω-reguły, czyli reguły wnioskowania o nieskończenie wielu przesłankach[4]. Można więc semantyczne pojęcie prawdziwości zastąpić pojęciem syntaktycznym, ale zawierającym odwołanie do nieskończoności aktualnej! Wyniki te są bardzo techniczne i nie możemy ich tu przytaczać w ścisłej postaci (omówienie tych wyników znaleźć można np. w pracy: Murawski 2002).

Okazuje się, że warunki podane przez Tarskiego w jego definicji pojęcia spełniania i prawdziwości z pracy z 1933 r. są zbyt słabe, by w sposób jednoznaczny scharakteryzować pojęcie prawdziwości. Pokazują to pewne twierdzenia dotyczące tzw. klas spełniania. Wyniki te są znów niestety bardzo złożone i nie możemy tutaj wchodzić w szczegóły techniczne (omówienie tego typu wyników znaleźć można np. w pracy: Murawski 1995). Powiedzmy więc tylko, że warunki indukcyjne definicji Tarskiego można potraktować jako aksjomaty dla nowego predykatu *S* spełniania/prawdziwości, który dodaje się do języka danej teorii *T*. Pytamy teraz, kiedy model dla teorii *T* można rozszerzyć poprzez dodanie realizacji predykatu *S* tak, by spełnione były warunki definicji Tarskiego. Okazuje się, że nie zawsze. Co więcej, jeśli już można to zrobić, to na ogół na bardzo wiele różnych, sprzecznych ze sobą sposobów. Dodajmy jeszcze, że istnieją także pewne patologiczne, tzn. niezgodne z intuicjami, realizacje tego predykatu.

Prof. Nowaczyk podkreśla w swoim artykule, że definicja Tarskiego nie daje kryterium prawdziwości − z czego zresztą zdawał sobie sprawę sam Tarski. W związku z tym warto może zacytować jego zdanie z późniejszego artykułu *Truth and Proof*, gdzie pisze: „Dowód jest wciąż jedyną metodą używaną

[4] Pozwala ona na przejście od nieskończenie wielu przesłanek postaci $\varphi(n)$ dla każdej liczby n do wniosku postaci $\forall n\ \varphi(n)$. Jest to więc reguła infinitarna. Dodajmy, że wszystkie reguły wnioskowania logiki I rzędu mają charakter finitarny.

do ustalania prawdziwości zdań w konkretnej teorii matematycznej”[5] (Tarski 1969: 77). I dodaje: „Zbiór zdań prawdziwych spełnia więc funkcję idealnej granicy, której nigdy nie zdołamy osiągnąć, lecz do której staramy się zbliżyć rozszerzając stopniowo zbiór zdań dowodliwych. (...). W rozwoju matematyki nie ma konfliktu między pojęciem prawdy i pojęciem dowodu; pojęcia te nie są na stopie wojennej, lecz pozostają w stanie pokojowego współistnienia”[6] (tamże).

Literatura cytowana

Gödel K. (1931), *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica” und verwandter Systeme I*, „Monatshefte für Mathematik und Physik” 38, s. 173−198. Przedruk wraz z przekładem angielskim: *On Formally Undecidable Propositions of ‘Principia Mathematica’ and Related Systems* w: K. Gödel, *Collected Works*, vol. I, ed. by S. Feferman et al., Oxford University Press, New York and Clarendon Press, Oxford 1986, s. 144−195.

Murawski R. (1995), *Kłopoty z prawdą, czyli o niejednoznaczności i patologiach klas spełniania*, w: *Eufonia i Logos*, red. J. Pogonowski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, s. 467−481.

Murawski R. (1998), *Undefinability of truth. The problem of the priority: Tarski vs. Gödel*, „History and Philosophy of Logic” 19, s. 153−160. Przedruk w: R. Murawski, *Logos and Máthēma. Studies in the Philosophy of Mathematics and History of Logic*, Peter Lang Internationaler Verlag der Wissenschaften, Frankfurt am Main 2011, s. 177−185.

Murawski R. (1999), *Recursive Functions and Metamathematics. Problems of Completeness and Decidability, Gödel’s Theorems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht−Boston−London.

Murawski R. (2002), *On the distinction proof-truth in mathematics*, w: P. Gärdenfors et al. (eds.), *In the Scope of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London.

[5] „Proof is still the only method used to ascertain the truth of sentences within any specific mathematical theory”.

[6] „The notion of a true sentence functions thus as an ideal limit which can never be reached but which we try to approximate by gradually widening the set of provable sentences. (...) There is no conflict between the notions of truth and proof in the development of mathematics; the two notions are not at war but live in peaceful coexistence”.

Murawski R. (2010), *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wyd. IV, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Murawski R. (2011), *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*, Monografie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Murawski R. (2014), *Twierdzenia limitacyjne*, w: *Nauka − możliwości i ograniczenia*, Warszawa, s. 57−67.

Tarski A. (1933), *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych, vol. 34, Warszawa. Przedruk w: Tarski 1995: 13−172.

Tarski A. (1935), *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, „Studia Philosophica" 1, s. 261−405.

Tarski A. (1956), *The Concept of Truth in Formalized Languages*, w: tenże, *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers From 1923 to 1938*, Clarendon Press, Oxford, s. 152–278.

Tarski A. (1969), *Truth and Proof*, „Scientific American" 220, No. 6, s. 63–77. Przekład polski: *Prawda i dowód*, w: Tarski 1995: 292–332.

Tarski A. (1995), *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Woleński J. (1985), *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Woleński J. (1991), *Gödel, Tarski and the Undefinability of Truth*, w: *Yearbook 1991 of the Kurt Gödel Society* (*Jahrbuch 1991 der Kurt-Gödel-Gesellschaft*), Kurt-Gödel-Gesellschaft, Wien, s. 97−108. Przedruk w: J. Woleński, *Essays in the History of Logic and Logical Philosophy*, Jagiellonian University Press, Kraków, s. 134−138.