Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 27: 2018, Nr 3 (107), ISSN 1230–1493
DOI: 10.24425/pfns.2018.125459

Jacek Hawranek,
Jan Zygmunt

Wokół pewnego zagadnienia z dziedziny półkrat górnych z jednością*

Słowa kluczowe: *półkrata górna, element minimalny, pytanie B. Wolniewicza, formalna ontologia sytuacji, przestrzeń topologiczna, zbiór gęsty, algebra Boole'a, filtr, operacja konsekwencji, zbiór niezależny*

Punktem wyjścia niniejszej pracy jest analiza pewnego pytania B. Wolniewicza dotyczącego półkrat górnych z jednością. Pytanie to – oznaczone niżej symbolem (P) – ma charakter czysto algebraiczny, ale jest inspirowane formalną ontologią sytuacji.

W rozdz. 2 i 3 rozważamy odpowiedniki pytania (P) w sformułowaniu teoriomnogościowym i topologicznym. W rozdz. 4 podajemy rozwiązanie problemu (P) odniesionego do algebr Boole'a. W końcowym rozdz. 5 pytanie (P) jest rozpatrywane na gruncie teorii konsekwencji.

* Praca ukazała się pierwotnie w „Acta Universitatis Wratislaviensis" nr 1445, „Logika" 15, Wrocław 1993, s. 59–68. Niniejszego przedruku dokonano za zgodą Wydawnictwa Uniwersytetu Wrocławskiego. Jedyne interwencje w przedrukowywany tekst polegały na usunięciu dostrzeżonych usterek frazeologicznych, terminologicznych, interpunkcyjnych i typograficznych. Autorzy dziękują panu mgr. Krzysztofowi Siemieńczukowi za pomoc w przygotowaniu składu komputerowego artykułu.

1. Oryginalne pytanie Wolniewicza i jego dyskusja

Półkratami górnymi z jednością są struktury algebraiczne postaci $(L, \vee, 1)$, w których L jest niepustym zbiorem, 1 – wyróżnionym elementem należącym do L, a $\vee$ jest dwuargumentowym działaniem spełniającym równania:

$$x \vee x = x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad x \vee 1 = 1.$$

Półkrata $(L, \vee, 1)$ jest *niezdegenerowana*, gdy w L są przynajmniej dwa różne elementy. Dla $a, b \in L$ definiujemy: $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Zbiór I jest *ideałem* w $(L, \vee, 1)$, gdy $I \neq \emptyset$, $I \subset L$ oraz spełnione są warunki:
(i) $a \in I$ oraz $b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$,
(ii) $a \in I$ oraz $b \leq a \Rightarrow b \in I$.

Ponadto, ideał I jest *właściwy*, gdy $I \neq L$.

Dowodzi się, korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna, że w każdej niezdegenerowanej półkracie z jednością istnieją ideały maksymalne.

W pracach B. Wolniewicza dotyczących formalnej ontologii sytuacji (*cf.* [2], [3], [4]) półkraty z jednością pojawiają się jako formalne odpowiedniki ogółu sytuacji elementarnych. Mówiąc nieco dokładniej, jeśli $(L, \vee, 1)$ jest taką półkratą, to elementy zbioru L są interpretowane jako sytuacje elementarne, wyróżniona jedność 1 odpowiada sytuacji niemożliwej, supremum $a \vee b$ zaś interpretuje się jako splot sytuacji a oraz b: $a \vee b$ jest najmniejszą sytuacją, w której zachodzi a oraz b. Ideały maksymalne są dla Wolniewicza realizacjami bądź możliwymi światami, ich ogół zaś stanowi przestrzeń logiczną związaną z algebrą sytuacji elementarnych $(L, \vee, 1)$.

Wróćmy znów do pojęć algebraicznych. Dla dowolnego $A \subset L$ połóżmy:

$A^{\perp} := \{b \in L : a \vee b = 1 \text{ dla kżdego } a \in A\}$,
$V(A) := (A^{\perp})^{\perp}$,
$\mathrm{Min}(A)$:= zbiór elementów minimalnych w A ze względu na $\leq$,
$\boldsymbol{R}$:= zbiór wszystkich ideałów maksymalnych w $(L, \vee, 1)$,
$r(A) := \{R \in \boldsymbol{R}: A \cap R \neq \emptyset\}$.

Oto oryginalne sformułowanie pytania Wolniewicza (*cf.* [4]):

„The question is under what properties of L – short of all its maximal ideals being finite – does an antichain $\mathrm{Min}V(A)$ always contain a *minimal* subchain B such that $r(B) = r(\mathrm{Min}V(A))$?”

Przyjmijmy definicję. Dla $M \subset L$ połóżmy:

$$\boldsymbol{B}_M := \{B \subset M : r(B) = r(M)\}.$$

Oryginalne sformułowanie pytania Wolniewicza można zastąpić – jak łatwo zauważyć – pytaniem prostszym i nieco ogólniejszym:

(P) Jakie własności musi spełniać półkrata górna z jednością (L, $\vee$, 1) – pominąwszy przypadek, kiedy wszystkie jej ideały maksymalne są skończone – aby w rodzinie $\boldsymbol{B}_M$ istniały elementy minimalne ze względu na inkluzję?

Już samo sformułowanie pytania Wolniewicza sugeruje, że zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli L jest półkratą górną z jednością, w której wszystkie ideały maksymalne są skończone, to w $\boldsymbol{B}_M$ istnieją elementy minimalne.*

Dowód. Dowodzi się, że $\boldsymbol{B}_M$ jest zamknięte na iloczyny mnogościowe dowolnych łańcuchów. Tym samym do częściowego porządku ($\boldsymbol{B}_M$, $\supset$) można zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna. Elementy maksymalne w ($\boldsymbol{B}_M$, $\supset$) są minimalne w ($\boldsymbol{B}_M$, $\subset$). Szczegóły rachunkowe dowodu pomijamy.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 można wzmocnić, jeśli zamiast założenia, iż wszystkie ideały maksymalne są skończone, przyjmiemy, że $R \cap M$ jest skończone dla każdego ideału maksymalnego R.

Dla lepszego zrozumienia założenia występującego w twierdzeniu 1 odnotujmy teraz następujący

FAKT. *W każdej niezdegenerowanej półkracie z jednością następujące warunki są równoważne*:

(1) *Każdy ideał właściwy jest skończony*.

(2) *Każdy ideał maksymalny jest skończony*.

(3) *Każdy ideał właściwy jest główny i skończony*.

(4) *Półkrata spełnia warunek ACC oraz pod każdym jej elementem różnym od jedności znajduje się skończenie wiele elementów*.

[Mówimy, że *półkrata* (ogólniej: zbiór częściowo uporządkowany) *spełnia* ACC, gdy nie istnieją w niej nieskończone i różnowartościowe ciągi rosnące $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ... Jest to równoważne temu, że każdy niepusty podzbiór półkraty ma element maksymalny.]

Dowód. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) jest oczywista. By udowodnić, że (2) $\Rightarrow$ (3), załóżmy, iż R jest ideałem właściwym. Jego maksymalne rozszerzenie jest – wobec (2) – skończone. Zatem R jest też skończone. Stąd sup $R \in R$, co z kolei implikuje równość: $R = \{x \in L : x \leq \sup R\}$. Zatem R jest ideałem głównym.

(3) $\Rightarrow$ (4). Załóżmy (3). Wtedy druga część warunku (4) jest natychmiastowa. Przypuśćmy, że rozważana półkrata nie spełnia ACC. Istnieje więc nieskończony i różnowartościowy ciąg $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ... Ideał generowany przez zbiór wyrazów tego ciągu jest właściwy i nieskończony, co przeczy (3).

(4) ⇒ (1). Stąd że półkrata spełnia ACC, wnosimy natychmiast, że każdy jej ideał jest główny, co w połączeniu z drugą częścią warunku (4) daje (1).

Uwaga 2. Żaden z powyższych warunków (1)–(4) nie pociąga za sobą skończoności półkraty. Istnieją bowiem nieskończone półkraty górne z jednością spełniające te warunki.

Uwaga 3. Istnieją też przykłady takich półkrat $(L, \vee, 1)$ oraz takich $M \subset L$, że w zbiorze $\boldsymbol{B}_M$ nie ma elementów minimalnych (*cf.* [1]).

2. Teoriomnogościowy odpowiednik pytania (P)

Porzucimy na chwilę algebraiczne założenia i przyjmiemy, że L jest całkowicie dowolnym niepustym zbiorem, $\boldsymbol{R}$ zaś dowolną niepustą rodziną niepustych podzbiorów zbioru L. Podobnie jak w rozdz. 1 dla $\emptyset \neq M \subset L$ definiujemy:

$$r(M) := \{R \in \boldsymbol{R}\colon R \cap M \neq \emptyset\} \text{ oraz } \boldsymbol{B}_M := \{B \subset M\colon r(B) = r(M)\}.$$

Stawiamy teraz pytanie:
(P_1) Kiedy w rodzinie $\boldsymbol{B}_M$ istnieją elementy minimalne?

TWIERDZENIE 2. *Przy powyższych założeniach następujące warunki są równoważne*:
(a) *W rodzinie* $\boldsymbol{B}_M$ *istnieją elementy minimalne*;
(b) *Istnieje takie* $B \in \boldsymbol{B}_M$, *że*

$$(\forall b \in B)(\exists R \in \boldsymbol{R})\ R \cap B = \{b\}. \tag{*}$$

Dowód. (a) ⇒ (b). Niech B będzie elementem minimalnym w $\boldsymbol{B}_M$. Wtedy $r(B) = r(M)$ oraz $r(B') \neq r(B)$ dla wszystkich $B' \subset B$ i $B' \neq B$. W szczególności $r(B - \{b\}) \neq r(B)$ dla każdego $b \in B$. Istnieje więc $R \in \boldsymbol{R}$, takie że $R \cap B \neq \emptyset$ oraz $R \cap (B - \{b\}) = \emptyset$. Stąd $R \cap B = \{b\}$, co dowodzi (*).

(b) ⇒ (a). Niech $B \in \boldsymbol{B}_M$. Załóżmy, że B spełnia (*) i przypuśćmy, że zbiór B nie jest minimalny w $\boldsymbol{B}_M$. Istnieje więc takie $B' \subset B$, że $r(B') = r(M)$ oraz $B' \neq B$. Weźmy $b \in B - B'$. Ponieważ $B' \subset B - \{b\} \subset B$, zatem $r(B') \subset r(B - b) \subset r(B)$. Reasumując, $r(B - \{b\}) = r(B)$, co przeczy (*) i kończy dowód twierdzenia 2.

3. Topologiczna analiza pytania (P)

Pomysł polega na tym, aby na zbiorze L zdefiniować topologię i za jej pomocą wyrazić warunki konieczne i dostateczne istnienia zbiorów minimalnych w $\boldsymbol{B}_M$.

Narzucającym się sposobem wprowadzenia topologii jest uznanie rodziny $\boldsymbol{R}$ za bazę. Aby tego dokonać, trzeba jednak przyjąć jeszcze jedno założenie, iż rodzina $\boldsymbol{R}$ jest zamknięta na skończone iloczyny mnogościowe. Zbiór $X \subset L$ definiujemy wtedy jako otwarty, $X \in \mathcal{O}$, gdy $X = L$ lub $X = \emptyset$, lub X jest sumą jakiejś podrodziny rodziny $\boldsymbol{R}$. Symbolem $\overline{X}$ oznaczać będziemy domknięcie zbioru X w topologii $(L, \mathcal{O})$:

$$p \in \overline{X} \Leftrightarrow X \cap U_p \neq \emptyset \text{ dla każdego otoczenia } U_p \text{ punktu } p.$$

LEMAT 1. *Niech X, $Y \subset L$. Wtedy*

$$r(X) = r(Y) \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{Y}.$$

Dowód. $(\Leftarrow)$ Niech $\overline{X} = \overline{Y}$. Weźmy $R \in r(X)$. Wtedy istnieje takie p, że $p \in X \cap R$. Stąd $p \in \overline{X}$, a zatem $p \in \overline{Y}$. Wybrane R jest otoczeniem punktu p, zatem $R \cap Y \neq \emptyset$, co znaczy, że $R \in r(Y)$. Reasumując, $r(X) \subset r(Y)$. Dowód inkluzji odwrotnej jest symetryczny.

$(\Rightarrow)$ Załóżmy, że $r(X) = r(Y)$. Niech $p \in \overline{X}$ oraz niech U_p będzie otoczeniem punktu p. Ponieważ $U_p = \bigcup \boldsymbol{R}'$ dla pewnego $\boldsymbol{R}' \subset \boldsymbol{R}$, zatem $X \cap \bigcup \boldsymbol{R}' \neq \emptyset$, czyli $X \cap R \neq \emptyset$ dla pewnego $R \in \boldsymbol{R}'$. Z założenia $R \cap Y \neq \emptyset$, a zatem $Y \cap U_p \neq \emptyset$, co znaczy, że $p \in U_p$. Stąd $\overline{X} \subset \overline{Y}$ Dowód inkluzji odwrotnej jest symetryczny.

Niech $M \subset L$. Potraktujemy M jako podprzestrzeń topologiczną przestrzeni $(L, \mathcal{O})$, tzn. $X \subset M$ uważać będziemy za zbiór otwarty w $(M, \mathcal{O}')$, gdy $X = M \cap U$ dla pewnego $U \in \mathcal{O}$. Przy tych założeniach zachodzą dwa proste lematy, których udowadniać nie będziemy:

LEMAT 2. $\boldsymbol{B}_M = \{B \subset M: \overline{B} = M\}$, *gdzie kreska oznacza operację domknięcia w topologii $\mathcal{O}'$. Innymi słowy, $\boldsymbol{B}_M$ jest rodziną wszystkich zbiorów gęstych w $(M, \mathcal{O}')$.*

LEMAT 3. *Niech $B \subset M$. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne*:

(i) $(\forall b \in B)\ \overline{B} \neq \overline{B - \{b\}}$;

(ii) $(\forall b \in B)\ b \notin \overline{B - \{b\}}$.

Warunek (ii) głosi, że każdy punkt zbioru B jest izolowany; o takim zbiorze B mówimy, że jest *zbiorem izolowanym*.

TWIERDZENIE 3. *Następujące warunki są równoważne*:
(i) *Istnieją zbiory minimalne w* $\boldsymbol{B}_M$;
(ii) *W przestrzeni topologicznej* $(M, \mathcal{O}')$ *istnieją podzbiory gęste i zarazem izolowane*.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Niech B będzie elementem minimalnym w $\boldsymbol{B}_M$. Oczywiście B jest gęsty. Na mocy dowodu twierdzenia 2, B spełnia warunek (*), czyli dla każdego $b \in B$ istnieje takie $R \in \boldsymbol{R}$, że $B \cap R = \{b\}$. Stąd i z określenia topologii $(M, \mathcal{O}')$ wnosimy, że $b \notin \overline{B - \{b\}}$ dla każdego $b \in B$. Zbiór B jest zatem izolowany.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Jeśli B jest gęsty, to $B \in \boldsymbol{B}_M$ na mocy lematu 2. Jeśli B jest izolowany, to wobec lematu 3, B jest minimalny w $\boldsymbol{B}_M$.

Uwaga 4. Ponieważ rodzina ideałów maksymalnych dowolnej półkraty górnej z jednością nie jest na ogół zamknięta na skończone iloczyny, twierdzenie 3 nie daje się wprost zastosować do oryginalnego pytania (P). Bliższa takiemu zastosowaniu jest następująca modyfikacja powyższej konstrukcji. Po pierwsze, już w punkcie wyjścia topologię definiujemy na zbiorze $M \subset L$, a nie na całym L. Po drugie, bazę stanowi rodzina $R^* := \{R \cap M\colon R \in \boldsymbol{R}\}$ przy założeniu, że spełniony jest warunek:

$$(\forall S, T \in \boldsymbol{R}^*)(\forall p \in S \cap T)(\exists U \in \boldsymbol{R})(p \in U \subset S \cap T)$$

Uwaga 5. Dowód twierdzenia 3 sugeruje, że możliwy jest czysto topologiczny odpowiednik pytania (P). Podkreślenie *czysto* ma wskazywać, że punktem wyjścia jest dowolna przestrzeń topologiczna $(M, \mathcal{O})$. Następnie definiujemy dwie operacje r_1 oraz r_2, kładąc dla $X \subset M$:

$$r_1(X) = \{U \in \mathcal{O}\colon X \cap U \neq \varnothing\} \text{ oraz}$$
$$r_2(X) = \{U \in b\mathcal{O}\colon X \cap U \neq \varnothing\},$$

gdzie $b\mathcal{O}$ jest bazą topologii $\mathcal{O}$.

Niech ϱ oznacza r_1 bądź r_2. Można udowodnić, że (*cf.* lemat 1)

$$\varrho(X) = \varrho(Y) \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{Y} \text{ (w topologii } \mathcal{O})$$

oraz odpowiednik twierdzenia 3:

TWIERDZENIE 4. *Niech* $\boldsymbol{B}_M = \{B \subset M\colon \varrho(B) = M\}$. *Wtedy następujące warunki są równoważne*:
(i) *Istnieją elementy minimalne w* $\boldsymbol{B}_M$;
(ii) *Istnieje zbiór* $B \subset M$, *który jest gęsty i izolowany*.

4. Analiza pytania (P) dla algebr Boole'a

Rozważać teraz będziemy pytanie (P) w odniesieniu do algebr Boole'a, a więc struktur algebraicznych o wiele bogatszych niż półkraty górne z jednością.

Zakładamy, że w niniejszym rozdziale $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, -, 0,1)$ będzie ustaloną algebrą Boole'a, $\boldsymbol{R}$ zaś ogółem jej ideałów maksymalnych.

LEMAT 4. *Jeśli M, $B \subset A$ (A jest uniwersum naszej ustalonej algebry Boole'a $\mathcal{A}$), to*

$$r(M) \subset r(B) \Leftrightarrow M \subset [B),$$

gdzie $[B)$ jest filtrem w $\mathcal{A}$ generowanym przez zbiór B.

Dowód. ($\Rightarrow$, przez transpozycję) Załóżmy, że istnieje takie $m \in M$, że $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \nleq m$ dla każdego $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Znaczy to, że $-b_1 \vee \ldots \vee -b_n \vee m \neq 1$. Stąd wnosimy, że ideał generowany przez zbiór $\{-b\colon b \in B\} \cup \{m\}$ jest właściwy. Możemy go więc rozszerzyć do ideału maksymalnego R. Wynika stąd, że $R \in r(M)$, ale $R \notin r(B)$, czyli $r(M) \not\subset r(B)$.

($\Leftarrow$) Niech $R \in r(M)$. Weźmy $m \in M \cap R$. Stąd i z założenia, iż $M \subset [B)$, wynika, że istnieją $b_1, \ldots, b_n \in B$ takie, że $b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \leq m$ oraz $b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \in R$. Z maksymalności wynika, że $b_i \in R$ dla pewnego $i \leq n$, co znaczy, że $R \in r(B)$.

WNIOSEK 1.

(i) $r(M) = r(B) \Leftrightarrow [M) = [B)$.

(ii) $B \subset M \Rightarrow [r(B) = r(M) \Leftrightarrow M \subset [B)]$.

(iii) *Zbiór $r(B)$, dla $B \subset A$, zawiera wszystkie ideały maksymalne algebry $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n = 0$ dla pewnych $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$.*

Dowód. Warunki (i) oraz (ii) łatwo dają się wyprowadzić z lematu 4. Jeśli w (ii) za M podstawimy A, to dostaniemy (iii).

WNIOSEK 2. $\boldsymbol{B}_M = \{B \subset M\colon M \subset [B)\} = \{B \subset M\colon [M) = [B)\}$.

Dowód. Wprost z definicji $\boldsymbol{B}_M$ i wniosku 1.

Przyjmiemy teraz roboczą definicję: Niepusty podzbiór $B \subset A$ nazywamy *odpowiednim*, gdy $r(B - \{b\}) \neq r(B)$ dla każdego $b \in B$.

Zauważmy, że jeśli M jest odpowiedni, to – wobec twierdzenia 2 – M jest minimalny w $\boldsymbol{B}_M$.

Lemat 5. *Zbiór B jest odpowiedni dokładnie wtedy, gdy $b \notin [B - \{b\})$ dla każdego $b \in B$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że zbiór B jest odpowiedni. Niech $b \in B$. Zatem istnieje taki ideał maksymalny R, że $R \cap B = \{b\}$. Przypuśćmy, że $b \in [B - \{b\})$. Wtedy $b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \leq b$ dla pewnych $b_1, \ldots, b_n \in B$ takich, że $b_i \neq b$ dla wszystkich $i \leq n$. Ponieważ $b \in R$, więc $b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \in R$. Stąd i z maksymalności R wnosimy, że $b_i \in R$ dla pewnego $i \leq n$. Zatem $B \cap R \supset \{b, b_i\}$ oraz $b \neq b_i$, co jest niemożliwe. Zatem $b \notin [B - \{b\})$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że B nie jest odpowiedni, tzn. $r(B - \{b\}) = r(B)$ pewnego $b \in B$. Stąd i z wniosku 1 (ii) mamy $B \subset [B - \{b\})$, co pociąga za sobą, że $b \in [B - \{b\})$.

Definicja. Niech M będzie ustalonym podzbiorem uniwersum algebry Boole'a $\mathcal{A}$, tzn. niech $M \subset A$. Powiemy, że zbiór $C \subset A$ ma *własność* **W** (*ze względu na M*) wtedy i tylko, gdy spełniony jest warunek:

$$(\forall b \in [M)) ([b \notin [C) \Rightarrow C \cup \{b\} \text{ jest odpowiedni}).$$

Ponadto definiujemy rodzinę $\boldsymbol{A}$, kładąc

$$\boldsymbol{A} := \{C \subset M\colon C \text{ jest odpowiedni i ma własność } \mathbf{W}\}.$$

Lemat 5. *Rodzina $\boldsymbol{A}$ jest zamknięta na sumy dowolnych łańcuchów.*

Dowód. Niech $\{C_i\colon i \in I\}$ będzie łańcuchem w $\boldsymbol{A}$. Przypuśćmy, że zbiór $C := \bigcup\{C_i\colon i \in I\}$ nie jest odpowiedni. Zatem istnieje takie $x \in C$, że $x \in [C - \{x\})$. Stąd $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \leq x$, $c_k \neq x$ dla $k \leq n$, dla pewnych $c_1, \ldots, c_n \in C$. Z uwagi na to, że zbiory C_i stanowią łańcuch, istnieje takie $j \in I$, że $x, c_1, \ldots, c_n \in C_j$. Stąd $x \in [C_i - \{x\})$, co przeczy temu, że C_i jest odpowiedni.

Aby udowodnić, że C ma własność **W**, weźmy $b \in [B)$ takie, że $b \notin [C)$ i przypuśćmy, iż zbiór $C \cup \{b\}$ nie jest odpowiedni. Znaczy to, że istnieje $x \in C$, $x \neq b$ oraz $x \in [C \cup \{b\} - \{x\})$. Stąd $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n \wedge b \leq x$ dla pewnych $c_1, \ldots, c_n \in C$ takich, że $c_k \neq x$ dla wszystkich $k \leq n$. Ponieważ zbiory C_i tworzą łańcuch, istnieje $j \in I$ takie, że $x, c_1, \ldots, c_n \in C_j$. Stąd $x \in [C_j \cup \{b\} - \{x\})$. Ponieważ $b \notin [C_j)$, C_j nie ma własności **W**, co jest sprzeczne z założeniem.

Lemat 6. *Jeśli C jest elementem maksymalnym w $\boldsymbol{A}$, to $[C) = [M)$, tzn. $C \in \boldsymbol{B}_M$.*

Dowód. Wystarczy uzasadnić, że $M \subset [C)$. Niech $m \in M$. Przypuśćmy, że $m \notin [C)$. Ponieważ C ma własność **W**, zbiór $C \cup \{m\}$ jest odpowiedni. Pokażemy, że $C \cup \{m\}$ też ma własność **W**. Załóżmy, że $b \notin [C \cup \{m\})$. Mamy pokazać, że $C \cup \{m, b\}$ jest odpowiedni. Rzeczywiście, $m \wedge b \notin [C)$, ponieważ $m \notin [C)$. Stąd $C \cup \{m \wedge b\}$ jest odpowiedni. Ale $[C \cup \{m \wedge b\}) = [C \cup \{m, b\})$, a zatem $C \cup \{m, b\}$ jest odpowiedni. Udowodniliśmy tym samym, że $C \cup \{m\} \in \boldsymbol{A}$. Wobec maksymalności C, $m \in C$, co daje sprzeczność. Zatem $m \in [C)$.

LEMAT 7. *Jeśli C jest elementem minimalnym w $\boldsymbol{B}_M$, to $C \in \boldsymbol{A}$.*

Dowód. Ponieważ C jest minimalny w $\boldsymbol{B}_M$, C jest odpowiedni ($C \neq \emptyset$, bo $M \neq \emptyset$). Element C ma własność **W**, ponieważ poprzednik warunku definiującego tę własność jest pusto spełniony.

TWIERDZENIE 5. *Następujące warunki są równoważne*:

(i) *Istnieje $C \subset M$, które jest odpowiednie i posiada własność* **W**, *tzn. rodzina $\boldsymbol{A}$ jest niepusta*;

(ii) *Istnieje element minimalny w rodzinie $\boldsymbol{B}_M$.*

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Jeśli $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$, to na mocy lematu 5 i lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny w $\boldsymbol{A}$; nazwijmy go C. Wobec lematu 6, $C \in \boldsymbol{B}_M$. Ponieważ C jest odpowiedni, musi też być minimalny w $\boldsymbol{B}_M$. Implikacja (ii) $\Rightarrow$ (i) wynika z lematu 7.

Stawiamy teraz pytanie: kiedy rodzina $\boldsymbol{A}$ jest niepusta? I dajemy na nie prostą odpowiedź.

Dla $M \subset A$ definiujemy

$$M_1 := \{m \in M\colon z_1 \wedge \ldots \wedge z_n \leq m \text{ dla pewnych } z_1, \ldots, z_n \in [M),\ z_i \neq m,\ i \leq n\}$$

oraz

$$M^* := M - M_1.$$

LEMAT 8. *Jeśli $M^* \neq \emptyset$, to $M^* \in \boldsymbol{A}$.*

Dowód. Niech $M^* \neq \emptyset$. Przypuśćmy, że zbiór M^* nie jest odpowiedni. Wtedy $x \in [M^* - \{x\})$ dla pewnego $x \in M^*$. Stąd $z_1 \wedge \ldots \wedge z_n \leq x$ dla pewnych $z_1, \ldots, z_n$ takich, że $z_i \neq x$ dla $i \leq n$. Ale to znaczy, że $x \in M_1$, co jest absurdem.

Aby udowodnić, że M^* ma własność **W**, weźmy $b \in [M)$ i przypuśćmy, że $x \in [M^* \cup \{b\} - \{x\})$ dla pewnego $x \in M^* \cup \{b\}$. Stąd $x \neq b$ oraz

$x \in M^*$. Opierając się raz jeszcze na tym przypuszczeniu wnosimy, że istnieją $z_1, ..., z_n \in M^*$, $z_i \neq x$ dla wszystkich $i \leq n$ oraz $z_1 \wedge ... \wedge z_n \wedge b \leq x$. Zatem $x \in M_1$, co daje sprzeczność.

Przykłady. 1. Jeśli zbiór M zawiera elementy $a_1, ..., a_n$ takie, że $a_1 \wedge ... \wedge a_n = 0$, to w rodzinie $\boldsymbol{B}_M$ istnieją zbiory minimalne. Są one podzbiorami zbioru $\{a_1, ..., a_n\}$. Jeśli $n = 2$, to zbiór $\{a_1, a_2\}$ jest minimalny.

2. Jeśli M zawiera się w zbiorze koatomów, to zbiór M sam jest minimalny.

5. Analiza pytania (P) w teorii konsekwencji

Podstawowe pojęcie teorii konsekwencji Tarskiego, jakim jest operacja konsekwencji, jest ogólniejsze niż operacja domknięcia – podstawowe pojęcie topologiczne. Z drugiej strony, operacja generowania filtru w algebrach Boole'a jest szczególnym przypadkiem skończonej operacji konsekwencji. Mając to na uwadze, w niniejszym rozdziale naszkicujemy podejście teoriokonsekwencyjne do pytania (P_1), wzorując się na analizie dokonanej w rozdziałach 3 i 4. Dowodów przedstawiać nie będziemy, ponieważ są analogiczne do dowodów wyżej podanych.

Założymy, podobnie jak w rozdz. 2, że L jest dowolnym niepustym zbiorem, $\boldsymbol{R}$ zaś dowolną niepustą rodziną niepustych podzbiorów zbioru L. Kierując się intuicjami topologicznymi, połóżmy dla $X \subset L$:

$$p \in \mathrm{Cn}(X) \Leftrightarrow (\forall R \in \boldsymbol{R})(p \in R \Rightarrow X \cap R \neq \varnothing)$$

bądź równoważnie

$$\mathrm{Cn}(X) = \bigcap\{-R\colon X \cap R = \varnothing,\ R \in \boldsymbol{R}\}.$$

Tak zdefiniowana funkcja Cn jest operacją konsekwencji. Można też udowodnić dwie następujące równoważności:

(1) $r(X) = r(Y) \Leftrightarrow \mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(Y)$

oraz

(2) Zbiór $B \subset M$ jest minimalny w $\boldsymbol{B}_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Cn}(B) = \mathrm{Cn}(M)$ i $b \notin \mathrm{Cn}(B - \{b\})$ dla każdego $b \in B$.

Tak więc minimalność wyraża się w (2) m.in. poprzez Cn-niezależność. Zauważmy też, że gdyby zbiór L był algebrą Boole'a i $\boldsymbol{R}$ rodziną jej wszystkich ideałów maksymalnych, to Cn byłoby operacją generowania filtrów, tj. $\mathrm{Cn}(X) = [X)$.

Dalsze rozważania prowadzimy przy dodatkowym założeniu, że Cn jest operacją skończoną, tzn. spełniającą warunek: jeśli $p \in \mathrm{Cn}(X)$, to $p \in \mathrm{Cn}(X_f)$ dla pewnego skończonego podzbioru $X_f \subset X$. Najpierw definiujemy własność $\mathbf{W}'$:

Zbiór $B \subset L$ ma *własność* $\mathbf{W}'$ (*ze względu na ustalony zbiór* $M \subset L$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego $F \subset \mathrm{Cn}(M)$ zachodzi implikacja:

$$(\forall b \in F)\ b \notin \mathrm{Cn}(B) \Rightarrow B \cup F \text{ jest Cn-niezależny.}$$

Następnie definiujemy rodzinę $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} := \{B \subset M\colon B \text{ jest Cn-niezależny i ma własność } \mathbf{W}'\}$$

Dla tak zdefiniowanych pojęć zachodzą następujące fakty:

(3) Rodzina $\boldsymbol{A}$ jest zamknięta na sumy łańcuchów.

(4) Elementy maksymalne w $\boldsymbol{A}$ należą do $\boldsymbol{B}_M$.

(5) Następujące warunki są równoważne: (i) $\boldsymbol{A} \neq \varnothing$; (ii) istnieją elementy minimalne w $\boldsymbol{B}_M$.

Problemem otwartym jest podanie prostych warunków wystarczających na to, by rodzina $\boldsymbol{A}$ była niepusta. Otwartym zaś zagadnieniem ogólniejszym, którym kończymy niniejszą pracę, jest pytanie: czy powyższa konstrukcja daje się przeprowadzić w kratach dystrybutywnych.

Bibliografia

[1] J. Hawranek i J. Zygmunt, *Comments on a question of Wolniewicz's*, „Bulletin of the Section of Logic" 19 (1990), 128–132.

[2] B. Wolniewicz, *Formal ontology of situations*, „Studia Logica" **41** (1982), 71–103.

[3] B. Wolniewicz, *A topology for logical space*, „Bulletin of the Section of Logic" **13** (1984), 255–259.

[4] B. Wolniewicz, *A question about join-semilattices*, „Bulletin of the Section of Logic" **19** (1990), 108.

Streszczenie

Artykuł w całości poświęcony jest rozważaniom nad pytaniem Bogusława Wolniewicza postawionym w jego nocie *A question about join-semilattices* („Bulletin of the Section of Logic" 1990, T. 19, nr 3). Część pierwsza artykułu dotyczy oryginalnego sformułowania tego pytania, w którym chodzi o podanie warunków dostatecznych na to, by w pewnej określonej rodzinie $\boldsymbol{B}_M$ podzbiorów półkraty górnej z jednością istniały elementy minimalne. W kolejnych czterech częściach pytanie roztrząsane jest w odniesieniu do innych analogicznych rodzin zbiorów, których elementami są: dowolne zbiory (abstrakcyjne), zbiory gęste w przestrzeni topologicznej; filtry w algebrze Boole'a oraz zbiory domknięte względem operacji konsekwencji.